

UNIVERSITATEA DIN TIMIȘOARA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ALE NATURII
SECȚIA MATEMATICĂ

TESTE ȘI PROBLEME COMENTATE

pentru

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „TRAIAN LALESCU”
(*licen*)

23

ALGEBRA ȘI ANALIZA MATEMATICĂ

pentru clasa a XII-a, partea a V-a

de

S. BIRĂUAȘ și M. DEACONESCU

1988

La realizarea acestui caiet au contribuit, respectiv, asist.univ. S.BIRĂUAȘ pentru partea de Analiză Matematică și asist.univ. M.DEACONESCU pentru partea de Algebră.

În mod indirect, lect.univ. GH. ECKSTEIN, ca și coordonator al programului de pregătire la matematică prin teste comentate ținute la Universitatea din Timișoara și în diferite centre din județele limitrofe având probleme comune, în anul școlar 1986-1987, a contribuit prin selecții sau propuneri și respectiv soluții la aceste teste.

Soluțiile prezentate în acest caiet au fost redactate respectiv de M. CHIS, elev, Timișoara (testele de la etapele a doua și a treia locale) și A. CONSTANTIN, elev, Timișoara, (testul de la etapa a întâia locală) sub coordonarea lect.univ. GH. ECKSTEIN.

Soluțiile la testele date la ediția a treia a concursului "Traian Lalescu" au fost redactate de lect. univ. GH. ECKSTEIN.

Testul de bacalaureat din paragraful 5A a fost propus de M. NEACȘU, profesor, Caransebeș.

Selecțiile din testele date la examenele de admitere în învățământul superior pentru loturile naționale de matematică și de fizică din paragraful 5B au beneficiat de experiența acumulată la Universitatea din Timișoara în ultimii ani la pregătirea la matematică a reprezentanților de frunte ai tineretului școlar.

Minibiblioteca de matematică destinată pregătirii loturilor a facilitat documentarea adecvată scopului propus pentru cele 23 de caiete de informare matematică pentru liceu care se încheie cu acest număr.

PREFATĂ

Concursul "Traian Lalescu" este componenta principală a programului complex de matematică "Memorial Traian Lalescu" ce înglobează o serie de activități menite să stimuleze eforturile elevilor, profesorilor și studenților în zona de interferență a activităților Universității din Timișoara și Institutului Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara. Profesorii de matematică ce se perfecționează la Universitatea din Timișoara, studenții facultății noastre care efectuează practică pedagogică în satele și orașele din județele limitrofe, elevii de liceu din zonă care urmează cursurile de pregătire la facultățile din Timișoara, elevii care activează în cercurile de matematică din școli și pe municipii și elevii cu rezultate deosebite la concursurile profesionale de matematică contribuie la realizarea unei mișcări matematice de masă. Se creează o atmosferă de întrecere în autoperfecționarea pregătirii la matematică. Pentru toți acești animatori ai spiritului de emulație în pregătirea la matematică, regulamentul Memorialului Traian Lalescu oferă un calendar de activități în care sînt prevăzute șase etape de testare sau autotestare a nivelului de pregătire menite să jaloneze stadiul de pregătire atins de participanți. Pentru aceste șase etape s-a elaborat o programă cu temele teoretice repartizate pe fiecare etapă și o listă de probleme, ca temă individuală pentru participanți, dintr-o bibliografie formată din cele mai reprezentative culegeri de probleme în uz. Pentru autotestarea sau controlul organizat de catedrele de matematică din unitățile școlare sau de către cercurile pedagogice, o comisie largă de cadre universitare, profesori de liceu și de gimnaziu, studenți și elevi pasionați de matematică conlucrează la elaborarea unei serii de caiete de informare matematică. În aceste caiete se preconizează să se ofere informații metodicoștiințifice elevilor și profesorilor interesați de actualizarea cunoștințelor necesare în abordarea unor teme sau probleme prezente la di-

ferite concursuri interne sau cu caracter internațional sau în gîndirea matematică actuală reflectată în revistele de matematică din țară sau din străinătate. Ele oferă seturi de probleme care completează manualele în uz, seturi de probleme de tip concurs și note matematice cu scurte sinteze pe diferite teme sau tipuri de probleme.

Acest caiet încheie prima etapă care s-a concretizat prin redactarea a cîte unui caiet destinat fiecărei etape de concurs, adică cîte cinci de fiecare dintre clasele V-XII și trei caiete cu probleme rezolvate sau propuse pentru forma prin corespondență a concursului.

Numerotarea caietelor este: 1-20 (gimnaziu) și 1-23 (liceu). Primul set (1-4) conține enunțuri de probleme date la diferite etape anterioare ale Concursului "Traian Lalescu" (edițiile I-III) și ilustrații prin exerciții și probleme ale programelor testelor nr.1 (octombrie), pentru fiecare clasă și care se referă la ultimele capitole din manualele clasei anterioare și noțiuni introductive pentru clasa în curs. Ele umplu un gol care scapă practicilor actuale ale concursurilor naționale care nu se mai adresează direct prin programele lor acestor părți din manuale și nici elevii nu mai sînt mobilizați de alte forme să nu negligeze aceste componente importante în cultura matematică a unui pretins bun cunoscător al matematicii de liceu.

Setul al cincilea în care se încadrează și acest caiet acoperă programa testelor nr.5 (mai) și nr.6 (iunie), în pas cu programa școlară pînă la această etapă a anului școlar.

Conținutul caietelor apărute se poate afla din informațiile prezentate pe ultima pagină a fiecărui caiet.

Caietele difuzate pînă în prezent s-au dovedit deosebit de utile în pregătirea tuturor elevilor pentru examenele de admitere la treapta I-a sau a II-a de liceu și mai ales la examenele de admitere în învățămîntul superior.

1. COMPLEMENTE LA MANUALELE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ȘI DE ALGEBRĂ

PENTRU CLASA a XII-a.

(ilustrări prin exerciții și probleme ale programelor testelor nr.5 (mai) și nr.6 (iunie)).

Partea din programa Concursului "Traian Lalescu" referitoare la testele nr.5 și nr.6 prevede, de fapt, toată materia din cele două manuale. Caietele anterioare au acoperit manualele respectiv pînă la aplicații ale integralei definite la Analiza Matematică și pînă la inele de polinoame la Algebră.

Vom insista în acest paragraf asupra acestor ultime părți din manualele și programele școlare. O recapitulare a manualului de Analiză Matematică și a celui de Algebră o vom realiza prin cîteva teste de bacalaureat sau de tip admitere în învățămîntul superior, în paragraful 5, precum și prin prezentarea soluțiilor la testele preliminare ce au parcurs ambele manuale și au fost date concurenților în anul școlar 1986-1987 în patru etape locale și la etapa interjudețeană de la Ineu, 5-7 iunie 1987 (p. 3 și p. 4).

1.A. COMPLEMENTE LA MANUALUL DE ANALIZĂ MATEMATICĂ PENTRU CLASA XII

Vom prezenta cîteva exerciții ilustrative asupra ultimei părți din manualul de Analiză Matematică pentru clasa a XII-a, împărțită în cîteva secvențe după cum se va vedea mai jos.

1.A.1. Aplicații ale integralei definite.

1.A.1.a) Calculul ariilor.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și pozitivă. Mulțimea punctelor din plan mărginită de axa Ox , graficul funcției f și dreptele $x=a$, $x=b$,

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

are arie și

- 4 -

$$A(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx$$

Fie $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, cu proprietatea că $f_1(x) \leq f_2(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b]$. Mulțimea

$$\Gamma_{f_1, f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

are arie și

$$A(\Gamma_{f_1, f_2}) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

1) Să se calculeze aria mulțimii mărginite de dreapta $y = x+1$, funcția $x \rightarrow \cos x$ și axa absciselor.

Soluție: Considerăm funcția

$$f: [-1, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

care este continuă pe $[-1, \frac{\pi}{2}]$ și mulțimea precizată în enunț este

$$\begin{aligned} \Gamma_f. \text{ Avem: } \\ A(\Gamma_f) &= \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left. \frac{(x+1)^2}{2} \right|_{-1}^0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Prin punctul $P(0, 2)$ se construiește o dreaptă oarecare care intersectează graficul în două puncte. Să se determine dreapta d astfel încât aria mulțimii mărginite de graficul lui f și dreapta să fie minimă.

Soluție: Considerăm dreapta de ecuație $y = mx + 2$ care intersectează graficul lui f în două puncte de abscise $x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2}$ și $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2}$. Aria mulțimii va fi:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (mx + 2 - x^2 - 1) dx = \frac{(m^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}{6}$$

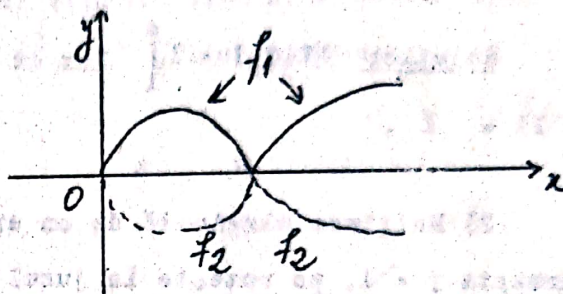
care este minimă când $m = 0$, adică dreapta este paralelă cu Ox .

3) Să se găsească aria mărginită de curba $y^2 = x(x-1)^2$.

Soluție: Considerăm funcțiile $f_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x} |x-1|$,
 $f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = -\sqrt{x} |x-1|$. Reuniunea graficelor funcțiilor
 f_1 și f_2 este curba din enunț.

Aria cerută va fi:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)] dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{x}(1-x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



4) Găsiți aria mulțimii mărginite de parabola $y = -x^2 - 2x + 3$, tangenta la această parabolă în punctul $M(2, -5)$ și axa $y'y$.

Răspuns: $A = \frac{8}{3}$.

5) Găsiți aria mulțimii mărginite de curba de ecuație $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

Răspuns: $A = \frac{8}{15}$.

1.A.1.b) Volumul corpurilor de rotație.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivă și continuă pe $[a, b]$ și mulțimea:

$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Prin rotirea în jurul lui această mulțime descrie un corp de rotație C_f . Volumul acestui corp este:

$$V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Dacă $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt continue pe $[a, b]$ cu $f_1(x) \leq f_2(x)$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci mulțimea

$$\Gamma_{f_1, f_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

prin rotirea ei în jurul axei Ox descrie un corp C_{f_1, f_2} al cărui volum este:

$$V(C_{f_1, f_2}) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

1) Să se determine volumul corpului de rotație determinat de funcția: $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $x \in [1, e]$.

Soluție: $V(C_f) = \pi \int_1^e \ln x dx = \pi (x \ln x - x) \Big|_1^e = \pi (e \ln e - e + 1) = \pi.$

2) Mulțimea mărginită de un arc de sinusoidă, axa ordonatelor, dreapta $y = 1$, se rotește în jurul lui Oy. Să se determine volumul corpului de rotație obținut.

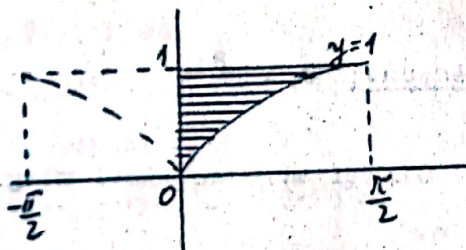
Soluție: Inversa funcției

$$\sin: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$$

este

$$f^{-1}: [0, 1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}],$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$



$$V(C_f) = \pi \int_0^1 (f^{-1}(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \arcsin^2 x dx.$$

Integrala de mai sus o calculăm prin părți. Funcția $x \rightarrow \arcsin x$ nu este derivabilă în $x = 1$ de aceea vom calcula:

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon \arcsin^2 x dx &= x \arcsin^2 x \Big|_0^\epsilon - \int_0^\epsilon x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \epsilon \arcsin^2 \epsilon + \int_0^\epsilon \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx = \epsilon \arcsin^2 \epsilon + \\ &+ \sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^\epsilon - \int_0^\epsilon \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \epsilon \arcsin^2 \epsilon + \\ &+ \sqrt{1-\epsilon^2} \arcsin \epsilon - \epsilon. \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \arcsin^2 x \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left(\varepsilon \arcsin^2 \varepsilon + \sqrt{1-\varepsilon^2} \arcsin \varepsilon - \varepsilon \right) = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

de unde

$$V(O_F) = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) = \frac{\pi^3 - 4\pi}{4}$$

3) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul lui Ox a mulțimii mărginite de cercul $x^2 + y^2 = 1$ și parabola $y^2 = \frac{3}{2}x$.

Soluție: Punctele de intersecție ale cercului cu parabola se obțin rezolvând sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

și obținem $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Considerăm funcția: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

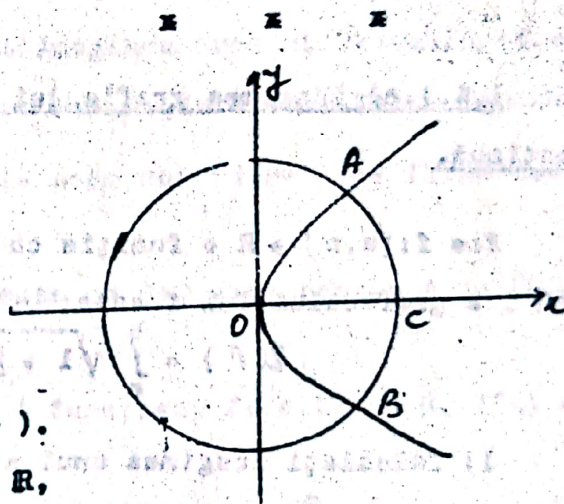
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2}x}, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sqrt{1-x^2}, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

f este continuă și graficul lui f este reuniunea dintre arcul de parabolă OA și arcul de cerc AC.

Din cauza simetriei față de Ox, volumul corpului de rotație obținut este:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 f^2(x) \, dx = \pi \left[\int_0^{1/2} \frac{3}{2}x \, dx + \int_{1/2}^1 (1-x^2) \, dx \right] = \\ &= \pi \left(\frac{3}{4}x^2 \Big|_0^{1/2} + x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{1/2}^1 \right) = \pi \left(\frac{3}{16} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \right) = \frac{19}{48}\pi. \end{aligned}$$

4) Să se calculeze volumul corpului ce se obține prin rotația în jurul axei Ox a mulțimii mărginite de graficul funcției cosinus și pa-



parabola $y = \frac{9}{2x^2} x^2$.

Răspuns: $V = \frac{X(6\sqrt{1} + 5\sqrt{3})}{20}$

5) Se consideră familia de funcții:

$f_a: [a-1, a+1] \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = x^2 - x + 1, a \in \mathbb{R}.$

Să se determine parametrul a astfel încât $V(f_a)$ să fie minim.

1.A.1.c) Lungimea graficului unei funcții derivabile cu derivată continuă.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu derivată continuă pe $[a, b]$. Lungimea $\ell(f)$ a graficului lui f este:

$$\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

1) Calculați lungimea unui arc de parabolă cuprins între punctele $O(0,0)$ și $A(a, a^2)$.

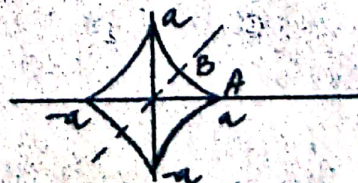
Soluție: Considerăm funcția $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și avem

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} dx = \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} + \\ &+ \frac{1}{8} \ln(a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}) + \frac{1}{8} \ln 2. \end{aligned}$$

2) Să se determine lungimea astroidului

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Soluție: Astroida este simetrică față de axele de coordonate precum și față de bisectoarea întâia, de aceea vom calcula lungimea arcului de astroidă AB, cuprins între



axa Ox și bisectoarea întâia și vom înmulți rezultatul cu 8.

Considerăm funcția $f: \left[-\frac{a}{2^{3/2}}, a\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$, care este derivabilă cu derivata continuă pe intervalul considerat și al cărei grafic coincide cu arcul de astroidă AB.

$$f'(x) = -x^{-1/3}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \quad \text{și} \quad \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}$$

$$l = 8 \int_{-\frac{a}{2^{3/2}}}^a a^{1/3} x^{-1/3} dx = 6a.$$

Observație. Dacă am fi calculat lungimea arcului de astroidă situat în cadranul I, ar fi apărut probleme cu derivabilitatea funcției $f(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ care trebuie acum considerată ca fiind definită pe $[0, a]$.

Avem $f'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3}$ care nu este cu derivata continuă pe $[0, a]$.

3) Calculați lungimea graficului funcției $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Răspuns: $l = \ln \frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$.

4) Calculați lungimea graficului funcției $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \cos x$.

Răspuns: $l = \ln \frac{3}{8}$.

5) Calculați lungimea graficului funcției $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Soluție: Un exercițiu care se poate rezolva folosind și numai considerații geometrice (teorema lui Pitagora). Il propunem totuși pentru a arăta că se pot aplica considerațiile teoretice de mai înainte cu

unele precauții. Funcția f nu este derivabilă în o , dar este derivabilă cu derivata continuă pe fiecare din intervalele $[-1,0]$ și $[0,1]$.

Lungimea graficului lui f o vom obține însumând cele două lungimi ale restricțiilor lui f la $[-1,0]$ respectiv $[0,1]$.

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_{-1}^0 \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2} \\ l_2 &= \int_0^1 \sqrt{2} \, dx = \sqrt{2}, \text{ de unde } l = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

1.A.1. d) Aria suprafețelor de rotație.

Fie $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă. Mulțimea:

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = f(x), (\forall) x \in [a,b]\}$$

se numește suprafața de rotație determinată de funcția f (sau suprafața obținută prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox).

Dacă f este derivabilă, cu derivata continuă atunci suprafața de rotație determinată de f are arie și

$$A(f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} \, dx$$

1) Să se determine aria suprafeței de rotație obținută prin rotația în jurul lui Ox a funcției:

$$f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{tg} x$$

Soluție: Funcția f este derivabilă cu derivata continuă pe

$[0, \frac{\pi}{4}]$, deci

$$\begin{aligned} A(f) &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \frac{\sqrt{1+\cos^4 x}}{\cos^2 x} \, dx = \\ &= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{1+(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \, dx. \end{aligned}$$

Facem schimbarea de variabilă $\varphi(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ și avem:

$$A(f) = \pi \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} \, d\varphi = \pi [\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}].$$

2) Să se determine aria suprafeței obținută prin rotația în jurul lui Ox a curbei OABCO determinată de curbele $y = x^2$ și $x = y^2$.

Soluție: Cele două parabole se intersectează în punctele $O(0,0)$ și $B(1,1)$.

Aria căutată este suma ariilor suprafețelor de rotație determinate de funcțiile

$$f_1: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2,$$

$$f_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt{x}.$$

$$A(f_1) = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{32} \pi \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Funcția f_2 nu este derivabilă în origine, dar funcția $x \rightarrow \sqrt{1 + (f_2'(x))^2}$ poate fi prelungită prin continuitate în origine. Pentru $x \in (0,1]$ avem: $f_2(x) \sqrt{1 + (f_2'(x))^2} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \frac{\sqrt{4x+1}}{2}$ și vom considera deci

$$f_2(x) \sqrt{1 + (f_2'(x))^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}}{2}, & x \in (0,1] \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Prin urmare:

$$A(f_2) = 2\pi \int_0^1 f_2(x) \sqrt{1 + (f_2'(x))^2} dx = \pi \int_0^1 \sqrt{4x+1} dx = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

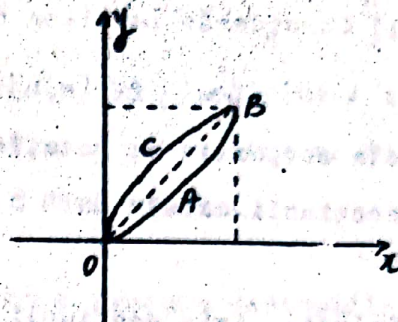
deci

$$A = A(f_1) + A(f_2).$$

3) Să se determine aria suprafeței de rotație determinată de funcția:

$$f: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{3}$$

Răspuns: $A(f) = (34\sqrt{17} - 2) \frac{\pi}{9}$



1.A.2. PROBLEME RECAPITULATIVE

În încheierea acestui paragraf încă câteva probleme:

1) Considerăm mulțimea de funcții

$$\mathcal{C} = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+, f \text{ continuă}\},$$

și toate corpurile de rotație determinate de funcții $f \in \mathcal{C}$ care au aria secțiunii axiale dată S . Să se determine corpul de volum minim.

■ ■ ■

Soluție: Aria secțiunii axiale a acestor corpuri este: $2\text{aria}(\Gamma_f)$, unde

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Deci } \int_a^b f(x) dx = \frac{S}{2}.$$

$$\text{Volumul: } V(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz pentru funcțiile

$$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = 1.$$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

de unde

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot (b-a),$$

deci

$$\frac{S}{2} \leq V(C_f) \cdot \frac{b-a}{\pi}.$$

Volumul este minim când are loc semnul egal, în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz. Semnul egal are loc dacă $f = \lambda g$, deci $f(x) = \lambda$, oricare ar fi $x \in [a, b]$.

Înlocuind în aria lui Γ_f deducem că

$$f(x) = \frac{S}{2(b-a)}, \quad (\forall) x \in [a, b].$$

f fiind constantă, corpul de rotație va fi un cilindru.

2) Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă strict crescătoare cu

proprietatea că volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului lui f în jurul lui Ox este egal cu volumul corpului obținut prin rotirea lui f în jurul lui Oy .

Să se arate că f are punct fix.

Indicație: Presupunem, prin reducere la absurd că $f(x) \neq x$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Atunci $f(x) > x$ sau $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, și se contrazice egalitatea celor două volume.

3) Fie $a > 0$, $b > 0$ și $f: [0,a] \rightarrow [0,b]$ o funcție derivabilă cu derivata continuă cu proprietățile: $f(0) = 0$, $f(a) = b$, $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [0,a]$. Demonstrați inegalitatea:

$$2 \int_0^a f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx < \sqrt{a^2 + b^2}$$

Interpretare geometrică.

G. Pólya.

Indicație: Considerăm funcțiile:

$$P(x) = f(x) \sqrt{x^2 + f'^2(x)}$$

$$G(x) = 2f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}, \quad x \in [0,a]$$

și arătăm că $P(a) > \int_0^a G(x) dx$.

1.B. COMPLEMENTE LA MANUALUL DE ALGEBRĂ PENTRU CLASA a XII-a.

(ilustrări prin exerciții și probleme ale temelor prevăzute pentru testul nr.5 (mai) și testul nr.6 (iunie).

1.B.1. Inele de polinoame.

Ex. Este $X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$ ireductibil? Dar $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$? Dar $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$?

Soluție: $x^4 + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 4x + 1)$ în $\mathbb{Z}_7[x]$.

$x^4 + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$.

$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ în $\mathbb{R}[x]$.

E2. Să se arate că orice funcție $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ este polinomială.

Soluție: Fie $\mathbb{Z}_p = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ și $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ o funcție.

Fie $P(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomul definit prin:

$$P(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)f(a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)f(a_2)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)} + \dots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})f(a_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}.$$

Se vede că $P(a_1) = f(a_1)$, ceea ce încheie soluția.

E3. Să se exprime în $\mathbb{Z}_3[x]$ 1 ca o combinație liniară de x^3 și $(1+x)^4$.

Indicație: Se folosește algoritmul lui Euclid.

E4. Descompuneți în factori $x^3 - x + 1 \in \mathbb{Z}_{23}[x]$ și $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_{31}[x]$.

Indicație: Fiecare are o rădăcină dublă și una simplă.

E5. Câte soluții distincte are ecuația $x^p + y^p = z^p$ în $\mathbb{Z}_p$?

Indicație: Folosiți teorema lui Fermat.

E6. Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Numim α întreg algebric dacă există un polinom $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ astfel încât $P(\alpha) = 0$. Determinați întregii algebrici din $\mathbb{Q}$.

E7. Fie K un corp și fie $P \in K[X]$ un polinom ireductibil. Să se arate că P are rădăcini simple dacă și numai dacă $P' \neq 0$.

* * *

E8. Fie $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ un polinom ireductibil. Să se arate că P nu are rădăcini multiple.

* * *

Soluție: Presupunem contrariul și alegem a : $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$. Atunci $(X-a) | P$, $(X-a) | P'$ deci $(P, P') \neq 1$ în $\mathbb{Z}_p[X]$ (derivata P' a polinomului $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ e polinomul obținut formal din P după regula obișnuită de derivare și nu are legătură cu derivata din Analiză).

Mai departe, cum $\text{grad}(P') < \text{grad}(P)$ și cum P este ireductibil, rezultă că dacă $P' \neq 0$ atunci $(P, P') = 1$ deci P nu poate avea rădăcini multiple.

Din cele două remarcă de mai sus, obținem că P are rădăcini multiple dacă și numai dacă $P' = 0$. Conform presupunerii noastre, avem deci $P' = 0$. Dacă scriem $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, atunci $P' = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \dots + na_nX^{n-1} = 0$ ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă $a_1 = 2a_2 = 3a_3 = \dots = na_n = 0$. Coeficienții fiind însă din $\mathbb{Z}_p$, egalitățile de mai sus conduc la $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = a_{p+1} = \dots = a_{2p-1} = a_{2p+1} = \dots = 0$, adică la faptul că toți coeficienții lui P , corespunzători puterilor X^k , unde $p \nmid k$ sînt nuli. Prin urmare, $P = a_0 + a_pX^p + a_{2p}X^{2p} + \dots + a_{mp}X^{mp} \in \mathbb{Z}_p[X^p]$.

Fie acum $\varphi: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ aplicația definită prin $\varphi(a) = a^p$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_p$. Conform teoremei lui Fermat, se știe că dacă $a \in \mathbb{Z}$ atunci $a^p \equiv a \pmod{p}$, congruență care se transformă în egalitate în $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$. În definiție, $\varphi(a) = a$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}_p$.

Putem dar scrie că $P = a_0 + a_pX^p + a_{2p}X^{2p} + \dots + a_{mp}X^{mp} = a_0^p + a_p^pX^p + a_{2p}^pX^{2p} + \dots + a_{mp}^pX^{mp} = a_0^p + (a_pX)^p + (a_{2p}X^2)^p + \dots + (a_{mp}X^m)^p = (a_0 + a_pX + a_{2p}X^2 + \dots + a_{mp}X^m)^p$ ceea ce contrazice

faptul că P este ireductibil. Contradicția obținută arată că de fapt P nu are rădăcini multiple.

E9. Fie $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polinom de grad cel puțin 1. Să se arate că P nu poate lua doar valori prime.

Indicație: Reducere la absurd. Se folosește faptul că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $a-b \mid P(a)-P(b)$.

E10. Să se arate că în $\mathbb{Q}[X]$ au loc divizibilitățile:

- i) $X^2+X+1 \mid (X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$
- ii) $X^2+3X+2 \mid (X+1)^{3n+2} + (X+2)$
- iii) $X^2+X+1 \mid X^{14} + X^7 + 1$
- iv) $(X-1)^2 \mid nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$
- v) $X^2-X+1 \mid (X-1)^{2n+1} + (-1)^{n+1}X^{n+2}$
- vi) $(X^2+1)(X+1) \mid X^{4m} + X^{4n+1} + X^{4p+2} + X^{4q+3}$
- vii) $X^{m-1} + X^{m-2} + \dots + X + 1 \mid X^{mb+m-1} + X^{mb+m-2} + \dots + X^{mb+1} + 1$

1.B.2. Spații liniare.

E1. Fie p un număr prim. Poate fi organizat $(\mathbb{Z}, +)$ ca un $\mathbb{Z}_p$ -spațiu liniar?

Soluție: Nu, deoarece în caz contrar, am avea $p = \hat{1} \cdot p = \hat{1}(\underbrace{1+\dots+1}_{p \text{ ori}})$
 $= \underbrace{\hat{1} \cdot 1 + \hat{1} \cdot 1 + \dots + \hat{1} \cdot 1}_{p \text{ ori}} = (\underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \dots + \hat{1}}_{p \text{ ori}}) \cdot 1 = \hat{p} \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$, contradicție.

E2. Să se arate că $(\mathbb{Q}, +)$ nu poate fi organizat ca $\mathbb{R}$ -spațiu liniar.

Soluție: Fie o lege de compoziție externă $\circ: R \times Q \rightarrow Q$ care satisface axiomele spațiului liniar. Atunci pentru orice $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, există $q \in Q^\times = Q - \{0\}$ pentru care $\alpha_1 o q \neq \alpha_2 o q$. Într-adevăr, din $\alpha_1 o q = \alpha_2 o q$ obținem $(\alpha_1 - \alpha_2) o q = 0$ și cum $q \neq 0$ deducem $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, deci $\alpha_1 = \alpha_2$, contradicție.

Fie $q \in Q^\times$ fixat și fie $f_q: R \rightarrow Q$ aplicația dată de $f_q(\alpha) := \alpha o q$, oricare ar fi $\alpha \in R$. Am arătat mai înainte că f_q e o injecție. Dar aceasta contrazice faptul că $\text{card}(R) > \text{card}(Q)$. Problema e rezolvată.

E3. Generalizați cele două probleme anterioare.

E4. În spațiul liniar $(R, R_n[X], +, \cdot)$ al polinoamelor de grad cel mult n se consideră vectorul $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.

Aflați coordonatele lui $P(X)$ în bazele următoare:

1°. $1, X, X^2, \dots, X^n$.

2°. $1, X-\lambda, (X-\lambda)^2, \dots, (X-\lambda)^n$, unde $\lambda \in R^\times$ e fixat.

E5. În spațiul liniar $(R, R^n, +, \cdot)$ se consideră sistemele de vectori

$v_1 = (1, n, n, \dots, n), v_2 = (n, 2, n, \dots, n), \dots, v_n = (n, n, \dots, n)$

$u_1 = (1, 1, 1, \dots, 1), u_2 = (1, 2, 1, \dots, 1), \dots, u_n = (1, 1, \dots, 1, n)$

1°. Să se arate că fiecare din sistemele de vectori de mai sus formează o bază a lui $(R, R^n, +, \cdot)$.

2°. Determinați legătura dintre coordonatele unui vector din R^n scris în cele două baze.

62. CITEVA PROBLEME DE TIP CONCURS.

1°. Să se determine funcția continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + 1, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Soluție: Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive pe $\mathbb{R}$ și este integrabilă pe orice interval $[0, x]$ (sau $[x, 0]$). Fie F o primitivă a lui f . Egalitatea din enunț devine:

$$f(x) = F(x) - F(0) + 1, \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Membrul drept al egalității de mai sus este o funcție derivabilă, deci și funcția f trebuie să fie derivabilă.

Derivând ambii membri ai egalității $(*)$ obținem:

$$f'(x) = f(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \quad (**)$$

de unde

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1, \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \quad (***)$$

(Am presupus că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.)

Demonstrați că dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$ atunci $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ ceea ce verifică $(**)$ dar nu verifică egalitatea din enunț).

Din $(***)$ rezultă:

$$\ln |f(x)| = x + c, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

Constanta c o determinăm din condiția $f(0) = 1$ (rezultă din enunț făcând $x = 0$). Rezultă $c = 0$, prin urmare:

$$\ln |f(x)| = x, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

de unde

$$|f(x)| = e^x, \quad (\forall) x \in \mathbb{R},$$

și deoarece f este continuă

$$f(x) = e^x, \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \text{ sau}$$

$$f(x) = -e^x, \quad (\forall) x \in \mathbb{R} \text{ care nu verifică egali-}$$

tatea din enunț.

Singura funcție care verifică egalitatea din enunț este:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x.$$

2°. Fie $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- i) $f(1) = 1$,
- ii) f este derivabilă pe $[1, \infty)$,
- iii) $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, $(\forall) x \geq 1$.

Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ există și este mai mică decât $1 + \frac{\pi}{4}$.

Soluție: Din (iii) $\Rightarrow f'(x) > 0$, $(\forall) x \geq 1$, deci f este strict crescătoare pe $[1, \infty)$, de unde $f(x) \geq f(1) = 1$, $(\forall) x \geq 1$. Ținând seama de teorema Leibniz-Newton:

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^2 + f^2(t)} dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t \Big|_1^x = \arctg x - \frac{\pi}{4} \\ \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \text{ de unde } f(x) \leq f(1) + \frac{\pi}{4} \text{ sau } f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}, (\forall) x \geq 1.$$

Prin urmare f este mărginită superior și este strict crescătoare deci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ există și este mai mică decât $1 + \frac{\pi}{4}$.

3°. Fie $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție descrescătoare.

- 1) Să se arate că există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- 2) Dacă, în plus, există $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{\infty} f(x) dx = a < \infty$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Soluție: 1) Sirul $(f(n))_{n \geq 1}$ este descrescător și mărginit inferior de zero, deci convergent; fie ℓ limita sa. Să arătăm că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell$ rezultă că:

$$(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, (\forall) n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(n) < \ell + \varepsilon$$

Deoarece f este descrescătoare, rezultă că oricare ar fi $x \geq n_0(\varepsilon)$ avem

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

Inegalitatea $\ell - \varepsilon < f(x)$, oricare ar fi $x \geq n_0(\varepsilon)$, rezultă notând pentru $x \geq n_0(\varepsilon)$, $n_1 = [x] + 1$ deci

$$\ell - \varepsilon < f(n_1) < f(x).$$

2) f fiind descrescătoare, este integrabilă pe orice interval $[0, n]$. Știm de la punctul 1) că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$. Presupunem că $\ell \neq 0$ (deci presupunem $\ell > 0$). f fiind descrescătoare avem: $f(x) \geq \ell$, oricare ar fi $x \geq 0$ deci

$$\int_0^n f(x) dx \geq \ell \cdot n$$

Trecem la limită pentru $n \rightarrow \infty$ și ținem seama de ipoteză și obținem: $a \geq \infty$ ceea ce este absurd. Deci $\ell = 0$.

4°. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- i) $f(0) = f(1) = 0$,
- ii) $f(x) > 0$, $(\forall) x \in (0, 1)$,
- iii) f este de două ori derivabilă pe $[0, 1]$,
- iv) f'' continuă pe $[0, 1]$.

Arătați că

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > 4.$$

Soluție: Deoarece f este continuă pe intervalul compact $[0, 1]$ rezultă că f este mărginită și își atinge marginile.

Fie x_M punctul în care f este maximă (din i) și ii) rezultă că $x_M \in (0, 1)$ deci $f(x_M) = M > 0$ (din ii)). Avem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &\geq \int_0^1 \frac{|f''(x)|}{M} dx = \frac{1}{M} \int_0^1 |f''(x)| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{M} \left| \int_0^1 f''(x) dx \right| = \frac{|f'(1) - f'(0)|}{M} \end{aligned}$$

și aici s-ar părea că ne-am blocat.

Să aplicăm funcției f teorema lui Lagrange pe intervalul $[0, x_M]$ și pe intervalul $[x_M, 1]$:

$$(\exists) a \in (0, x_M) : f'(a) = \frac{f(x_M) - f(0)}{x_M - 0} = \frac{M}{x_M}$$

$$(\exists) b \in (x_M, 1) : f'(b) = \frac{f(1) - f(x_M)}{1 - x_M} = \frac{-M}{1 - x_M}$$

deci

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{1}{M} \left| \int_a^b f''(x) dx \right| = \frac{1}{M} |f'(b) - f'(a)| = \\
 & = \frac{1}{M} \left| \frac{-M}{1-x_M} - \frac{M}{x_M} \right| = \left| \frac{1}{1-x_M} + \frac{1}{x_M} \right| = \frac{1}{x_M(1-x_M)}
 \end{aligned}$$

Dar funcția $x \rightarrow x(1-x)$ are un maxim egal cu $\frac{1}{4}$ pe $(0,1)$ deci

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{1}{x_M(1-x_M)} > 4.$$

5°. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă satisfăcând:

$$f'(t) \leq 1, \quad (\forall) t \in [0,1] \quad \text{și} \quad f(0) = 0$$

Demonstrați inegalitatea:

$$\left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 \geq \int_0^1 f^3(t) dt.$$

Soluție: Din ipoteză avem că f este strict crescătoare pe $[0,1]$ și din $f(0) = 0$ rezultă că $f(t) > 0$, oricare ar fi $t \in (0,1)$.

Să considerăm acum funcția $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \left[\int_0^x f(t) dt \right]^2 - \int_0^x f^3(t) dt$.

F este derivabilă pe $[0,1]$ și

$$F'(x) = f(x) \left[2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x) \right].$$

Pentru a determina semnul lui F' considerăm funcția:

$$G: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$$

G este derivabilă pe $[0,1]$ și

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] \geq 0$$

Dar $G(0) = 0$ deci G fiind crescătoare pe $[0,1]$ rezultă $G(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0,1]$.

Revenind la expresia lui F' avem:

$$F'(x) = f(x)G(x) \geq 0, \quad \text{oricare ar fi } x \in [0,1].$$

Rezultă că F este crescătoare pe $[0,1]$ deci $F(1) \geq F(0) = 0$ și, prin urmare

$$\left[\int_0^1 f(t) dt \right]^2 \geq \int_0^1 f^3(t) dt.$$

6°. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, de două ori derivabilă pe (a, b) care satisface condiția $f(a) = f(b) = 0$. Demonstrați inegalitatea

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

unde $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Considerăm funcția

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = (t-a)(t-b)f(x) - (x-a)(x-b)f(t)$$

unde $x \in (a, b)$ este fixat.

Observăm că $g(a) = g(b) = 0$, g este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) deci putem aplica teorema lui Rolle și deducem că există $c_1 \in (a, x)$, $c_2 \in (x, b)$ cu

$$g'(c_1) = 0, \quad g'(c_2) = 0$$

$$g'(t) = (2t-a-b)f(x) - (x-a)(x-b)f'(t)$$

Considerăm funcția $g'(t) = (2t-a-b)f(x) - (x-a)(x-b)f'(t)$ care verifică ipotezele teoremei lui Rolle pe $[c_1, c_2]$ și deci există $c \in [c_1, c_2]$ astfel încât

$$g''(c) = 2f(x) - (x-a)(x-b)f''(c) = 0$$

Deducem astfel că

$$|f(x)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} M$$

de unde rezultă

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^3}{12} M$$

deoarece

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{M}{2} (-x^2 + (a+b)x - ab) dx &= \frac{M}{2} \left(\left. -\frac{x^3}{3} \right|_a^b + \left. \frac{(a+b)x^2}{2} \right|_a^b - ab(b-a) \right) = \\ &= M \frac{(b-a)^3}{12}. \end{aligned}$$

7°. Fie $F: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ și $G: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ două funcții cu proprietățile:

1) F este crescătoare, derivabilă cu derivata continuă pe $[0, \infty)$

- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$,
 iii) G este continuă, mărginită și crescătoare,
 iv) $F(x+1) - F(x) < c$, ($\forall$) $x \in [0, \infty)$ (c este o constantă)

Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x G(x-y)F'(y)dy}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x).$$

Soluție: Deoarece G este crescătoare și mărginită deducem că există $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \bar{G} \in \mathbb{R}$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $x > n_0$ să avem $\bar{G} - G(x) < \varepsilon$.

Din iv) deducem că

$$F(x) - F(x-n_0) = F(x) - F(x-1) + F(x-1) - F(x-2) + \dots < n_0 c$$

oricare ar fi $x > n_0$.

Pe de altă parte este clar că $\bar{G} \geq \bar{G} - G(x) \geq 0$ (G este crescătoare și pozitivă). Deducem astfel că F' este pozitivă (întrucât F este crescătoare)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^x (\bar{G} - G(x-y))F'(y)dy = \int_0^{x-n_0} [\bar{G} - G(x-y)]F'(y)dy + \\ &+ \int_{x-n_0}^x [\bar{G} - G(x-y)]F'(y)dy \leq \int_0^{x-n_0} F'(y)dy + \bar{G} \int_{x-n_0}^x F'(y)dy = \\ &= \varepsilon(F(x-n_0) - F(0)) + \bar{G}(F(x) - F(x-n_0)) \leq \bar{G}n_0c + \varepsilon F(x-n_0). \end{aligned}$$

Rezultă astfel că

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^x \bar{G} F'(y)dy - \int_0^x G(x-y)F'(y)dy \leq \bar{G}n_0c + \varepsilon F(x-n_0) \\ 0 &\leq \bar{G}F(x) - \int_0^x G(x-y)F'(y)dy \leq \bar{G}n_0c + \bar{G}F(0) + \varepsilon F(x-n_0) \end{aligned}$$

și cum $F(x) > 0$, pentru x suficient de mare, putem împărți relația cu

$$F(x) \text{ și avem } 0 \leq \bar{G} - \frac{\int_0^x G(x-y)F'(y)dy}{F(x)} \leq \frac{\bar{G}n_0c + \bar{G}F(0)}{F(x)} + \frac{F(x-n_0)}{F(x)}$$

$$0 \leq \bar{G} - \frac{\int_0^x G(x-y)F'(y)dy}{F(x)} \leq \frac{\bar{G}\eta_c + \bar{G}F(0)}{F(x)} + \varepsilon$$

și cum $\xi > 0$ poate fi luat oricât de mic iar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{G}\eta_c + GF(0)}{F(x)} = 0$ rezultă enunțul.

8°. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă cu proprietatea $f(1) - f(0) = 1$. Arătați că $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

Soluție: În inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx, \text{ pentru } f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

integrabile), considerăm $a = 0$, $b = 1$, f' în loc de f și $g(x) = 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

Dar f' este integrabilă și $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = 1$ deci $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

9°. Construiți o funcție $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $[a,b]$ cu proprietatea că nu există $c \in [a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$.

Soluție: Considerăm funcția $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

f este monotan crescătoare pe $[a,b]$ deci integrabilă Riemann pe $[a,b]$

și:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Dar } (b-a)f(c) = \begin{cases} 0, & a \leq c \leq \frac{a+b}{2} \\ b-a, & \frac{a+b}{2} < c \leq b \end{cases}$$

deci

$$\int_a^b f(x) dx \neq (b-a)f(c) \text{ oricare ar fi } c \in [a, b].$$

Dacă f este continuă, un astfel de exemplu nu mai poate fi posibil conform teoremei mediei.

10°. Fie $d > 0$. Să se arate că există $M > 0$ încît

$$\int_x^{x+d} |\sin x + \cos x| dx \geq M, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine cel mai mare număr M cu această proprietate.

Concurs profesional studentesc.

Soluție: Avem: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Definim funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{x+d} \sqrt{2} \left| \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right| dx = \sqrt{2} \int_x^{x+d} \left| \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right| dx$$

Funcția $x \rightarrow \left| \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right|$ este continuă pe $\mathbb{R}$ deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie g una dintre acestea. Avem:

$$f(x) = \sqrt{2}(g(x+d) - g(x)), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \sqrt{2} [g'(x+d) - g'(x)] = \sqrt{2} \left[\left| \cos(x+d - \frac{\pi}{4}) \right| - \left| \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right| \right]$$

Determinăm punctele de minim ale lui f rezolvînd ecuația $f'(x) = 0$ și studiînd semnul lui f' .

Punctele de minim vor fi

$$x_k = k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{d}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă $M = f(x_k)$.

11°. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe $[a, b]$ și f' strict crescătoare pe $[a, b]$.

1°. Să se arate că relația

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(g(x)), \quad (\forall) x \in (a, b)$$

definește o funcție continuă pe $(a, b]$ strict crescătoare, care se poa-

te prelungi prin continuitate în a ;

2° Presupunând în plus că f este de două ori derivabilă cu f'' continuă pe $[a, g(b)]$, să se arate că g este derivabilă pe (a, b) dacă și numai dacă $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, g(b))$.

3°. Să se calculeze $\int_a^b \frac{f(t) - f(a)}{t - a} g'(t) dt$.

4°. Să se studieze cazul particular $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$.

Concurs profesional studentesc.

Soluție: 1° f este derivabilă pe $[a, b]$ deci f' are proprietatea lui Darboux. Dar f' este și strict crescătoare pe $[a, b]$ deci f' este continuă pe $[a, b]$ și injectivă (fiind strict crescătoare pe $[a, b]$).

Să arătăm existența funcției g . Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[a, x]$, cu $x \in (a, b]$. Există $c_x \in (a, x)$ astfel încît

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x) \quad (1)$$

f' fiind injectivă rezultă că c_x este unic determinat de x .

Am obținut astfel o aplicație $g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = c_x$.

Revenind în (1) rezultă că $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(g(x))$, oricare ar fi $x \in (a, b]$. (2)

În egalitatea (2) trecem la limită pentru $x \rightarrow a$, $x > a$. Funcția f fiind derivabilă pe $[a, b]$ cu f' continuă obținem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f'(g(x)) \text{ de unde rezultă:}$$

$$f'(a) = f'(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x)).$$

f' este injectivă deci $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = a$.

Definim: $g(a) = a$ și am obținut o funcție continuă $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$2^\circ. \text{ Avem } \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\frac{f'(g(x)) - f'(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}} \cdot \frac{f'(g(x)) - f'(g(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{f'(g(x)) - f'(g(x_0))} \cdot \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}}{x - x_0}$$

Se aplică definiția derivatei, ținând seama că g este continuă.

$$3^0. \int_a^b \frac{f(t) - f(a)}{t - a} g'(t) dt = \int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t) dt = f(g(t)) \Big|_a^b = f(g(b)) - f(g(a)).$$

4⁰. Dacă $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ atunci relația de definiție a funcției g devine

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{g(x)}, \quad x \in (0, 1] \quad \text{de unde}$$

$$g(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}, \quad x \in (0, 1], \text{ etc.}$$

12⁰. Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

(i) f este derivabilă cu derivata continuă;

(ii) $f(0) = f(2) = 1$

(iii) $|f'(x)| \leq 1, (\forall) x \in [0, 2]$.

Să se arate că

$$\left| \int_0^2 f(x) dx \right| > 1.$$

x x x

Soluție: Fie $x \in (0, 2)$. Aplicăm teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[0, x]$ și $[x, 2]$; rezultă că există $\theta_1 \in (0, x)$ și $\theta_2 \in (x, 2)$ cu proprietățile

$$f(x) = 1 + xf'(\theta_1) = 1 + f'(\theta_2)(x - 2) \quad \text{de unde}$$

$$f(x) \geq 1 - x, \quad (\forall) x \in [0, 1],$$

$$f(x) \geq x - 1, \quad (\forall) x \in [1, 2].$$

Prin urmare

$$\int_0^2 f(x) dx \geq \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = 1$$

Egalitate am putea avea dacă

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1] \\ x - 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

dar această funcție nu este derivabilă în punctul $x_0=1$ deci inegalitatea este strictă.

13°. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ care satisface ecuația $f(x+y) = f(x) + f(y)$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Să se calculeze $\int_0^x f(t)dt + \int_0^y f(t)dt - \int_0^{x+y} f(t)dt$.

(ii) Să se arate că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = cx$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Concurs profesional studentesc.

Soluție: (i) Avem
$$I = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f(t)dt - \int_0^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f(t)dt - \int_0^y f(t)dt - \int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_y^{x+y} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(y+u)du = -xf(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$$

prin schimbarea de variabilă $t = y+u$.

(ii) Considerăm funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, care este continuă. Egalitatea de la (i) revine la

$$F(x) + F(y) - F(x+y) = -xf(y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$$

Considerăm $x \neq 0$ fixat. Rezultă că aplicația

$$y \mapsto f(y) = -\frac{1}{x} [F(x) + F(y) - F(x+y)] \quad (*)$$

este continuă, deci f este continuă; prin urmare F este derivabilă deci f este derivabilă și satisface ecuația funcțională

$$f(x) + f(y) = f(x+y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$$

Ținând seama că $f(0) = 0$, putem scrie

$$\frac{f(y) - f(0)}{y} = \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$$

unde $x \in \mathbb{R}$ este fixat și $y \neq 0$. Trecând la limită pentru $y \rightarrow 0$ obținem (f fiind derivabilă pe $\mathbb{R}$)

$$f'(0) = f'(x).$$

Deci f' este constantă. Fie $f'(x) = c$, de unde

$$f(x) = cx + d, (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Dar $f(0) = 0$, prin urmare $f(x) = cx$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

14°. Fie $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ continuă.

(a) Să se calculeze

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{x-t}^{x+t} f(s)ds, \quad x \in (a, b).$$

(b) Dacă f este continuă și îndeplinește una din condițiile:

(i) f își atinge marginile în (a,b) , sau

(ii) $f(a) = f(b)$

atunci există $c \in (a,b)$ încît

$$\int_a^c f(s)ds = f(c)(c-a).$$

(c) Dacă f este continuă, inversabilă cu inversa continuă, atunci

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^d f^{-1}(y)dy + \left| \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \right| = 0.$$

Concurs profesional studentesc.

Soluție: a) f fiind continuă admite primitive pe $[a,b]$. Fie F o primitivă a lui f . Aplicînd teorema lui Leibniz-Newton avem:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{x-t}^{x+t} f(s)ds = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+t) - F(x-t)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} f(x+t) + f(x-t) = 2f(x), x \in (a,b).$$

b) Presupunem că f își atinge marginile în (a,b) . Există așadar $x_m, x_M \in (a,b)$ astfel încît

$$f(x_m) = m = \inf_{x \in (a,b)} f(x)$$

$$f(x_M) = M = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

Considerăm funcția auxiliară: $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_a^x f(t)dt - f(x)(x-a)$. Avem

$$g(x_m) = \int_a^{x_m} f(t)dt - f(x_m)(x_m-a) = (x_m-a)f(c_1) - f(x_m)(x_m-a) =$$

$$= (x_m-a)(f(c_1) - f(x_m)) \geq 0 \quad (\text{am aplicat teorema mediei pentru}$$

integrala $\int_a^{x_m} f(t)dt$).

Analog

$$g(x_M) = \int_a^{x_M} f(t)dt - f(x_M)(x_M-a) = (x_M-a)(f(c_2)) - f(x_M)(x_M-a) =$$

$$= (x_M-a)(f(c_2) - f(x_M)) \leq 0.$$

Deoarece g este continuă pe $[x_m, x_M]$ rezultă că există $c \in [x_m, x_M] \subset C(a, b)$ astfel încît $g(c) = 0$.

c) Tineți seama de interpretarea geometrică a integralei.

15°. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă și numerele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$

Atunci pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ există $x_0 \in [a, b]$ cu

$$\alpha_1 \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt + \alpha_2 \int_{x_0}^{x_2} f(t) dt + \dots + \alpha_n \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = 0.$$

Soluție: Considerăm funcția continuă $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ atunci

$$\min_{i=1, n} F(x_i) \leq \frac{\alpha_1 F(x_1) + \dots + \alpha_n F(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \leq \max_{i=1, n} F(x_i)$$

și cum F este continuă, există $x_0 \in [a, b]$ astfel încît

$$F(x_0) = \frac{\alpha_1 F(x_1) + \dots + \alpha_n F(x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

adică

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{x_0}^{x_i} f(t) dt = 0$$

Dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ rezultă $\alpha_i = 0$ și este evident.

16°. Știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ să se arate că există un interval $I \subset \mathbb{R}$ și o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_0^x e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0, \quad (\forall) x \in I.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției f .

Soluție: Pentru început considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) =$

$= \int_0^y e^{-t^2} dt$. Cîteva proprietăți imediate ale funcției g :

(i) $g(0) = 0$,

(ii) g este continuă pe $\mathbb{R}$,

(iii) aplicația $t \rightarrow e^{-t^2}$ fiind continuă rezultă că g este derivabilă și $g'(y) = e^{-y^2}$ oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$,

(iv) $g'(y) > 0$ oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$ deci g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$,

(v) folosind ipoteza $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ rezultă că:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ și } \lim_{y \rightarrow \infty} g(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Din proprietățile de mai sus rezultă că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$, $g(y) = \int_0^y e^{-t^2} dt$ este bijectivă (fiind strict crescătoare și continuă pe $\mathbb{R}$). Prin urmare există $g^{-1}: (-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Egalitatea din enunț se mai poate scrie:

$$g(f(x)) + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0, \quad (\forall) x \in I,$$

scriere care sugerează considerarea funcției:

$$f(x) = g^{-1}\left(-\int_0^{x^2} \sin^2 t dt\right),$$

unde $x \in I = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\sqrt{\pi}}{2} < -\int_0^{x^2} \sin^2 t dt < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\}$ pentru a se putea face compunerea de mai sus. Să explicităm acum mulțimea I .

Inegalitatea $-\int_0^{x^2} \sin^2 t dt < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deoarece $x^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $\sin^2 t \geq 0$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

Inegalitatea $-\frac{\sqrt{\pi}}{2} < -\int_0^{x^2} \sin^2 t dt$ devine $\int_0^{x^2} \sin^2 t dt < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Definim funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^{x^2} \sin^2 t dt$ care are proprietățile:

(i) $h(x) = h(-x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$;

(ii) h este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$; (calculați h' și arătați că $h'(x) > 0$, oricare ar fi $x > 0$)

(iii) $h(0) = 0$;

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ (exercițiu !).

Din (ii), (iii), (iv) rezultă că există un unic $A > 0$ astfel încât $h(A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ecuația $h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ nu se poate rezolva prin metode directe de-

oarece este o ecuație transcendentă. Ne mulțumim de aceea cu demonstrația existenței soluției $\lambda > 0$.

Ținând seama de (i) și (iii) soluția inecuației $h(x) < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ va fi intervalul $I = (-\lambda, \lambda)$.

Așadar $f: (-\lambda, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = g^{-1}(-\int_0^{x^2} \sin^2 t \, dt)$.

Studiem acum derivabilitatea funcției f .

Pentru început facem observația că f este continuă, deoarece g fiind strict crescătoare și continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că g^{-1} este continuă deci f este compusa a două aplicații continue.

Fie $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$. Avem:

$$\begin{aligned} \int_0^{f(x)} e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t \, dt &= 0 \quad \text{și} \\ \int_0^{f(x_0)} e^{-t^2} dt + \int_0^{x_0^2} \sin^2 t \, dt &= 0 \end{aligned}$$

de unde, prin scădere obținem:

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} e^{-t^2} dt + \int_{x_0^2}^{x^2} \sin^2 t \, dt = 0 \quad (*)$$

Aplicăm teorema mediei; există c_1 între x_0^2 și x^2 respectiv c_2 între $f(x_0)$ și $f(x)$ astfel încât

$$\begin{aligned} \int_{f(x_0)}^{f(x)} e^{-t^2} dt &= [f(x) - f(x_0)] e^{-c_2^2}, \\ \int_{x_0^2}^{x^2} \sin^2 t \, dt &= (x^2 - x_0^2) \sin^2 c_1 \end{aligned}$$

Înlocuind în (*) obținem:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -(x + x_0) e^{c_2^2} \sin^2 c_1$$

Trecând la limită pentru $x \rightarrow x_0$ avem $c_1 \rightarrow x_0^2$ și $c_2 \rightarrow f(x_0)$

și:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x + x_0) e^{c_2^2} \sin^2 c_1] = -2x_0 e^{f^2(x_0)} \sin^2 x_0^2$$

Rezultă că f este derivabilă în orice punct $x_0 \in I$ și avem relația:

$$f'(x_0) = -2x_0 e^{f^2(x_0)} \cdot \sin^2 x_0^2$$

17°. Dacă $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă cu

$$6 \int_0^1 f(x) dx = 2a + 3b + 6c$$

atunci există $d \in (0,1)$ astfel încît

$$f(d) = ad^2 + bd + c.$$

* * *

Soluție: Presupunem că nu există $d \in (0,1)$ astfel încît $f(d) = ad^2 + bd + c$. Atunci

$$f(x) > ax^2 + bx + c, \quad (\forall) x \in (0,1) \quad (1)$$

sau

$$f(x) < ax^2 + bx + c, \quad (\forall) x \in (0,1) \quad (2)$$

Din (1) și (2) prin integrare rezultă

$$\int_0^1 f(x) dx \neq \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Comentariu. În soluția de mai sus intervine următoarea proprietate

Dacă $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sînt continue și $f(x) > g(x)$ oricare ar fi $x \in [a,b]$

atunci $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$. Încercați să o demonstrați.

18°. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f: [0,1] \rightarrow [0,2]$ continue cu $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

(i) Dacă f, f^2 atunci f este constantă.

(ii) $\int_0^1 xf(x) dx \neq \frac{3}{4}$ pentru orice f .

* * *

Soluție: (i) Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz considerînd funcțiile f (din enunț) și $g(x) = 1$ oricare ar fi $x \in [0,1]$ și obținem

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \quad (*)$$

Dar $f, f^2 \in \mathcal{I}$, de unde rezultă că în (*) are loc semnul egal. Se știe că în inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz semnul egal are loc dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \lambda g(x)$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$, deci în cazul problemei noastre avem $f(x) = \lambda$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Ținând seama că $f \in \mathcal{I}$ rezultă că $\lambda = 1$ deci $f(x) = 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

(ii) Aplicăm din nou inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz considerând de această dată funcțiile f și $g(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Obținem:

$$\left(\int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \frac{4}{3}$$
 deoarece $f(x) \in [0, 2]$.

19°. Determinați minimul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 |t^2 + x| dt$.

Soluție: Vom "explicita" funcția f calculând integrala din enunț.

Fie $x \geq 0$ fixat. Atunci $t^2 + x \geq 0$ oricare ar fi $t \in [0, 1]$ deci $|t^2 + x| = t^2 + x$, prin urmare avem:

$$f(x) = \int_0^1 (t^2 + x) dt = \left. \frac{t^3}{3} + xt \right|_0^1 = \frac{1}{3} + x$$

Fie $x \leq -1$ fixat. Atunci $t^2 + x \leq 0$, oricare ar fi $t \in [0, 1]$ deci $|t^2 + x| = -t^2 - x$ și

$$f(x) = \int_0^1 (-t^2 - x) dt = -\left. \frac{t^3}{3} + tx \right|_0^1 = -\frac{1}{3} - x.$$

Fie $-1 < x < 0$ fixat. Atunci

$$|t^2 + x| = \begin{cases} t^2 + x, & \text{dacă } t \geq \sqrt{-x} \\ -t^2 - x, & \text{dacă } 0 \leq t < \sqrt{-x} \end{cases}$$

$$f(x) = \int_0^{\sqrt{-x}} (-t^2 - x) dt + \int_{\sqrt{-x}}^1 (t^2 + x) dt = -\left. \frac{t^3}{3} - xt \right|_0^{\sqrt{-x}} + \left. \frac{t^3}{3} + xt \right|_{\sqrt{-x}}^1 = \frac{-4x\sqrt{-x}}{3} + x + \frac{1}{3}$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{3} & \text{dacă } x \geq 0 \\ \frac{-4x\sqrt{-x}}{3} + x + \frac{1}{3} & \text{dacă } -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{3} - x & \text{dacă } x \leq -1 \end{cases}$$

20°. Să se arate că

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2$$

pentru orice funcție $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ continuă.

Soluție: Aplicăm inegalitatea Schwarz-Buniakowski în forma:

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx.$$

21°. Să se cerceteze dacă există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

- (i) f bijectivă,
- (ii) f admite primitive,
- (iii) $f \circ f \in \int f$.

Soluție: Deoarece f admite primitive rezultă că f are proprietatea lui Darboux. Funcția f fiind injectivă cu proprietatea lui Darboux va fi strict monotonă (și continuă). Dar f strict monotonă implică $f \circ f$ strict crescătoare.

Dar $f \circ f \in \int f$, prin urmare funcția $f \circ f$ este derivabilă; fiind strict crescătoare rezultă $(f \circ f)'(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Din (iii) avem că $(f \circ f)'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ rezultă deci că $f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, ceea ce contrazice faptul că f este surjectivă.

Prin urmare nu există funcții f cu proprietățile de mai sus.

22°. Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, iar $F_1(x) = \int_0^x f(t) dt$, $F_2(x) = \int_0^x F_1(t) dt$, ..., $F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(t) dt$.

Să se arate că:

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

Soluție: Facem observația că f continuă implică $F_1, F_2, \dots, F_n$... derivabile pe $[0, \infty)$.

Notăm:

$$F_{ij}(x) = \int_0^x (x-t)^i F_j(t) dt$$

Integrăm prin părți, considerînd:

$$\begin{aligned} u(t) &= F_j(t), & u'(t) &= F_{j-1}(t) \\ v'(t) &= (x-t)^i, & v(t) &= -\frac{1}{i+1} (x-t)^{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) &= -\frac{1}{i+1} F_j(t)(x-t)^{i+1} \Big|_0^x + \frac{1}{i+1} \int_0^x (x-t)^{i+1} F_{j-1}(t) dt = \\ &= \frac{1}{i+1} F_{i+1,j-1}(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } F_n(x) &= F_{0,n-1}(x) = F_{1,n-2}(x) = \frac{1}{2} F_{2,n-3} = \frac{1}{2 \cdot 3} F_{3,n-4} = \\ &= \dots = \frac{1}{(n-1)!} F_{n-1,0} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

23°. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe $[a, b]$ (adică de două ori derivabilă cu f'' continuă), cu $f(a) = f(b) = 0$ atunci

$$\int_a^b f(x)f''(x)dx \leq 0$$

Soluție: Integrăm prin părți, considerînd:

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x), & u'(x) &= f'(x) \\ v'(x) &= f''(x), & v(x) &= f'(x) \end{aligned}$$

și obținem:

$$\int_a^b f(x)f''(x)dx = - \int_a^b (f'(x))^2 dx \leq 0.$$

Semnul egal are loc dacă și numai dacă $\int_a^b (f'(x))^2 dx = 0$. Deoarece f' este continuă, obținem că $f'(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$, deci f este constantă. Avînd în vedere că $f(a) = 0$ rezultă deci că $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [a, b]$.

3. SOLUTII LA PROBLEMELE DATE LA TESTELE PRELIMINARE - EDITIA 1987.

In acest paragraf vom prezenta unele soluții la problemele date la etapele locale (etapa a I-a -14 decembrie 1986, etapa a II-a - 22 februarie 1987, etapa a III-a -22 martie 1987) și etapa județeană (etapa a IV-a -24 mai 1987) a Concursului Interjudețean "Traian-Lalescu" ediția a III-a 1987, teste preliminare unitare pentru cele patru județe (în mod experimental) propuse la clasa a XII-a.

TESTUL DAT LA ETAPA a I-a LOCALA, 14 DECEMBRIE 1986

1°. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$$

să aibă primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Observăm că $\cos^2 \frac{1}{x} = \frac{\cos \frac{2}{x} + 1}{2}$, deci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{2}{x} + \frac{1}{2} & , x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$$

Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4} \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2} x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

F este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ și

$$F'(x) = -\frac{x^2}{4} \cdot \frac{-2}{x^2} \cos \frac{2}{x} - \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2} , \quad x \neq 0.$$

Pe de altă parte

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4} \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{4} \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} ,$$

deoarece $\left| \frac{x}{4} \sin \frac{2}{x} \right| \leq \left| \frac{x}{4} \right|$ implică $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{4} \sin \frac{2}{x} \right) = 0$

Am obținut astfel că

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \frac{2}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Considerind $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ observăm că g este continuă pe $\mathbb{R}$ și $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \sin \frac{2}{x} = 0 = g(0)$, deoarece $|\frac{x}{2} \sin \frac{2}{x}| \leq |\frac{x}{2}|$, deci g este continuă pe $\mathbb{R}$. Rezultă că g admite o primitivă $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $\alpha = \frac{1}{2}$ avem că

$$F'(x) = f(x) - G'(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

deci $f(x) = (F+G)'(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, adică f admite primitive.

Să presupunem acum că funcția dată f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie h funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$. Atunci $f-h$ admite primitive, deci funcția $u = f-h$, $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

admite primitive. Cum u trebuie să aibă proprietatea Darboux rezultă

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Am arătat astfel că f admite primitive dacă și numai dacă $\alpha = \frac{1}{2}$.

2°. Să se calculeze primitivele funcției $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x.$$

Soluție: Funcția f este continuă, fiind definită cu ajutorul unor operații cu funcții elementare continue, deci admite primitive.

Avem

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx &= \int ((\operatorname{tg} \frac{x}{2})' + \operatorname{tg} \frac{x}{2}) e^x dx = \int (e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2})' dx = \\ &= e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

3°. În $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}, a \neq -2\}$ se definește $A \cdot B = AB + 2(A+B+I_3)$.

Să se arate că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup.

Soluție: Observăm că dacă $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ f & e & d \end{pmatrix}$

cu $a \neq -2$, $d \neq -2$, avem că

$$\begin{aligned} AB + 2(A+B+I_3) &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ f & e & d \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 2a+2d+2 & 0 & 0 \\ 2b+2e & 2a+2d+2 & 0 \\ 2c+2f & 2b+2e & 2a+2d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ bd+ae & ad & 0 \\ cd+be+af & bd+ae & ae \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 2a+2d+2 & 0 & 0 \\ 2b+2e & 2a+2d+2 & 0 \\ 2c+2f & 2b+2e & 2a+2d+2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad+2a+2d+2 & 0 & 0 \\ bd+ae+2b+2e & ad+2a+2d+2 & 0 \\ cd+be+af+2c+2f & bd+ae+2b+2e & ad+2a+2d+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iar $ad+2a+2d+2 = -2 \Leftrightarrow (a+2)(d+2) = 0$ deci dacă $a \neq -2$, $d \neq -2$ avem că $ad+2a+2d+2 \neq -2$. Din cele de mai sus deducem că " $\cdot$ " definește o lege de compoziție pe mulțimea

Folosind asociativitatea înmulțirii în $M_3(\mathbb{R})$ avem că

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= (AB + 2(A+B+I_3)) \cdot C = ABC + 2AC + 2BC + 2C + \\ &+ 2AB + 4A + 4B + 4I_3 + 2C + 2I_3 = ABC + 2AC + 2BC + 2AB + 4A + 4B + \\ &+ 4C + 6I_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= A \cdot (BC + 2(B+C+I_3)) = ABC + 2AB + 2AC + 2A + 2B + \\ &+ 2BC + 4B + 4C + 4I_3 + 2I_3 = ABC + 2AB + 2AC + 2BC + 4A + 4B + 4C + \\ &+ 6I_3, \end{aligned}$$

deci legea de compoziție este asociativă.

Pe de altă parte însă

$$AB = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ bd+ae & ad & 0 \\ cd+be+af & bd+ae & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ f & e & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} = BA$$

$$\text{deci } AB + 2A + 2B + 2I_3 = BA + 2B + 2A + 2I_3 \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A \text{ adică}$$

că legea de compoziție este comutativă.

Se observă că $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ iar pentru orice $A \in \mathcal{M}$ avem

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

deci $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ este element neutru.

Să arătăm că fiecare element $A \in \mathcal{M}$ are un invers $B \in \mathcal{M}$.

$$A \cdot B = B \cdot A = E \Leftrightarrow \begin{cases} ad + 2a + 2d + 2 = -1 \\ bd + ae + 2b + 2e = 0 \\ cd + be + af + 2c + 2f = 0 \end{cases}$$

(A, B au elementele componente de la începutul rezolvării).

$$ad + 2a + 2d + 2 = -1 \Leftrightarrow (a+2)(d+2) = 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{a+2} - 2 \quad (a \neq -2)$$

iar $\frac{1}{a+2} - 2 \neq -2$.

Înlocuind expresia obținută pentru d în a doua ecuație deducem că

$$\frac{1}{a+2} (-2ab - 3b + a^2e + 2ae + 2ba + 2b + 2ae + 4e) = 0 \Leftrightarrow e(a+2)^2 =$$

$$= b \Leftrightarrow e = \frac{b}{(a+2)^2} \quad (a \neq -2).$$

Înlocuind expresiile obținute pentru d, e în a treia ecuație obținem

$$(a+2)f = -cd - be - 2c = \frac{2ac + 3c}{a+2} - \frac{b^2}{(a+2)^2} - 2c = \frac{c}{a+2}$$

$$- \frac{b^2}{(a+2)^2} \Leftrightarrow f = \frac{c}{(a+2)^2} - \frac{b^2}{(a+2)^3} \quad (a \neq -2)$$

dedi fiecare element din mulțimea $\mathcal{M}$ are un invers care de asemenea este din mulțimea $\mathcal{M}$.

Rezultă că $(\mathcal{M}, \cdot)$ este grup abelian.

4°. Următorul tabel este un fragment din tabla operației unui grup

	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y	z	x
b	b	e	a	z	x	y
x	x	z				a
y	y					
z	z					

Completați tabla.

Soluție: Din prima linie se vede că elementul neutru al grupului este e deci $xe = x$, $ye = y$, $ze = z$. Din $ab = e$ rezultă $b^{-1} = a$ deci $ba = e$. Pe fiecare linie și coloană din tablă trebuie să apară fiecare element al grupului câte o singură dată. În linia a doua mai trebuie să apară x și z și cum z figurează deja pe ultima coloană rezultă că $ay = z$ și $az = x$. Pentru moment tabla este

	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y	z	x
b	b	e	a			
x	x	z				a
y	y					
z	z					

În continuare, pe linia a

treia

$$bb = b(aa) = (ba)a = ea = a$$

$$bx = b(az) = (ba)z = ez = z$$

$$by = b(ax) = (ba)x = ex = x$$

$$bz = b(ay) = (ba)y = ey = y$$

Pe coloana a doua mai lipsesc x, y și deoarece y nu mai poate să apară pe linia a 5-a, tabla a devenit:

	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y	z	x
b	b	e	a	z	x	y
x	x	z				a
y	y	x				
z	z	y				

Urmează

$$xb = x(aa) = (xa)a = za = y$$

și cum pe coloana a treia mai lipsesc x, z, trebuie să avem $yb = z$, $zb = x$.

$$\text{Din } xz = a, x(za) = aa = b$$

adică $xy = b$ și pe linia a patra trebuie să apară e deci $xx = e$.

Tot din $xz = a$ se deduce $axz = b$ deci $yz = b$ și tabla a devenit:

	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y	z	x
b	b	e	a	z	x	y
x	x	z	y	e	b	a
y	y	x	z	a	e	b
z	z	y	x	b	a	e

(zona hășurată este încă neomplătită) Ultima coloană lipsește e deci $zz = e$.

Pe penultima linie lipsește e și el nu poate apare în coloana lui x deci $yy = e$

și atunci $yx = a$.

Ultima linie se completează automat adăugând pe coloanele 4 și 5 ceea ce lipsește.

5°. Fie $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\} \mid f \text{ are primitive pe } \mathbb{R}\}$. Pentru $f, g \in \mathcal{F}$ se pune

$$f \pi g = f + g - \frac{1}{2} fg$$

Să se studieze dacă $(\mathcal{F}, \pi)$ este sau nu grup comutativ (se cere justificarea în întregime a răspunsului).

Soluție: Vom arăta că π nu definește o lege de compoziție pe $\mathcal{F}$. Considerăm funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Observăm că

$$(-x^2 \sin \frac{1}{x})' = \cos \frac{1}{x} - 2x \sin \frac{1}{x}.$$

Cum funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă

($\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ deoarece $|2x \sin \frac{1}{x}| \leq |2x|$) deducem că admite primitive. Fie $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa. Deoarece

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} -x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă iar

$$H'(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} - 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x \sin \frac{1}{x}) = 0$ pentru că $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$ deducem că

$$f(x) = H'(x) + G'(x), \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

adică $f(x) = (H + G)'(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ deci f admite primitive.

Se mai observă că $f(x) \neq 2$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ deci $f \notin \mathcal{F}$.

Avem că

$$f \neq f = 2f - \frac{1}{2}f^2 \notin \mathcal{F}$$

$$\text{Intr-adevăr, } 2f(x) - \frac{1}{2}f^2(x) = \begin{cases} 2\cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - \frac{1}{2} \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nu admite primitive deoarece se scrie ca diferență dintre o funcție care admite primitive și o funcție care nu admite primitive (vezi problema 1^o).

Rezultă că $(\mathcal{F}, \neq)$ nu poate fi grup.

6^o. Fie S_n grupul multiplicativ al rădăcinilor complexe de ordinul n al unității. Să se formuleze o condiție necesară și suficientă pentru ca S_n să aibă proprietatea: "Pentru orice două subgrupuri H_1, H_2 ale lui S_n are loc $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$ ".

Soluție: Elementele lui S_n sînt numerele complexe de forma $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, unde $k \in \overline{1, n}$. Dacă un subgrup H conține pe x_k și pe x_m și notăm $d = (k, m)$ (cel mai mare divizor comun al lui k, m) atunci deoarece $d = \alpha k + \beta m$ (cu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$), $x_d = (x_k)^\alpha \cdot (x_m)^\beta \in H$. În particular, dacă k este cel mai mic indice pentru care $x_k \in H$ iar $x_m \in H$ rezultă $d = k$ adică k divide m adică subgrupul H este format din toate elementele de forma $(x_k)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Deoarece $1 = x^n \in H$, k este un divizor al lui n . Fie H_1, H_2 două subgrupuri și x_{k_1}, x_{k_2} eleme-

tele cu cel mai mic indice din cele două grupuri. Atunci $H_1 \subset H_2$ înseamnă k_2 divide k_1 , iar $H_2 \subset H_1$ înseamnă k_1 divide k_2 .

Rezultă deci că S_n are proprietatea din enunț dacă și numai dacă n are proprietatea: "Oricare ar fi doi divizori k_1, k_2 ai lui n , k_1 divide k_2 sau k_2 divide k_1 ". Evident pentru ca n să aibă proprietatea de mai sus, este necesar ca el să nu aibă divizori primi distincți, adică ca $n = p^\alpha$ cu p număr prim și $\alpha \in \mathbb{N}$ și e clar că această condiție este și suficientă.

Probleme de rezervă pentru testul 1.

2'. Să se calculeze primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}$$

Soluție: Aplicând formula de integrare prin părți obținem că

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot (\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})})' dx = (\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})})^3 -$$

$$- \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}} dx = (\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})})^3 -$$

$$- \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$$

de unde deducem că

$$\frac{3}{2} \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = (\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})})^3 + C$$

deci

$$\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx = \frac{2}{3} (\sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})})^3 + C$$

4'. Fie a și b elemente ale grupului G . Arătați că dacă $b^6 = 1$ și $ba = ab^4$ atunci $b^3 = 1$.

* * *

Soluție: Din relațiile din enunț deducem că

$$\left. \begin{array}{l} b^6 a = b^5 ab^4 \Rightarrow a = b^5 ab^4 \\ bab^2 = ab^6 \Rightarrow a = bab^2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^5 ab^4 = bab^2 \Rightarrow b^4 ab^2 = a.$$

Cum $bab^2 = a$ deducem că $b^4 ab^2 = bab^2 \Rightarrow b^3 = 1$.

5'. Fie A submulțime finită a intervalului (a, b) . Să se construiască $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ având proprietățile:

- (i) f mărginită,
- (ii) f e continuă pe $[a, b] - A$ și discontinuă în punctele lui A ,
- (iii) f admite primitive.

* * *

Soluție: Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Considerăm funcția

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} P'(x) \sin \frac{1}{(x-a_1) \dots (x-a_n)}, & x \in [a, b] - A \\ 0, & x = a_i, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

unde $P(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$.

Funcția f este mărginită și este continuă pe $[a, b] - A$ și discontinuă în orice punct din A (nu există $\lim_{x \rightarrow a_i} f(x)$).

O primitivă a lui f este de forma

$$F(x) = \begin{cases} P^2(x) \cos \frac{1}{P(x)} + G(x), & x \in [a, b] - A \\ G(a_i), & x = a_i, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

unde G este primitiva funcției continue

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} -2P(x)P'(x) \cos \frac{1}{P(x)}, & x \in [a, b] - A \\ 0, & x = a_i, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

deci

$$(P^2(x) \cos \frac{1}{P(x)})' = P'(x) \sin \frac{1}{P(x)} + 2P(x)P'(x) \cos \frac{1}{P(x)}, \quad x \in [a, b] - A.$$

Intr-adevăr, F este derivabilă pe $[a, b] - A$ și $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a, b] - A$ iar

$$\lim_{x \rightarrow a_1} \frac{F(x) - F(a_1)}{x - a_1} = \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{P^2(x) \cos \frac{1}{P(x)} + G(x) - G(a_1)}{x - a_1} = 0$$

deoarece

$$\left| \frac{-P^2(x) \cos \frac{1}{P(x)}}{x - a_1} \right| \leq |x - a_1| \prod_{j \neq 1} (x - a_j)^2; \quad \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{G(x) - G(a_1)}{x - a_1} = 0.$$

6'. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și G un grup pentru care aplicația $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(x) = x^{n+1}$ este un automorfism. Arătați că

- (i) $x^n y = y x^n$ pentru fiecare $x \in G, y \in G$;
 - (ii) aplicația $\psi: G \rightarrow G, \psi(x) = x^n$ este un endomorfism.
- În cazul particular $n = 2$ arătați că G este abelian.

Soluție: (i) Fie $x, y \in G$ arbitrari. Să arătăm că $x^n y = y x^n$.

Deoarece G este grup există $z \in G$ astfel încât $xz = y$. Cum φ este automorfism deducem că există $u \in G$ astfel încât $u^{n+1} = z$. Obținem astfel că

$$\begin{aligned} x^n y &= x^n xz = x^{n+1} z = x^{n+1} u^{n+1} = (xu)^{n+1} = \underbrace{xuxux \dots uxu}_{n \text{ ori}} = \\ &= x(ux)^n u = x(ux)^{n+1} (ux)^{-1} u = xu^{n+1} x^{n+1} x^{-1} u^{-1} u = \\ &= xu^{n+1} x^n = xzx^n = yx^n \end{aligned}$$

Deducem că $x^n y = y x^n$ oricare ar fi $x, y \in G$.

(ii) Observăm că

$$(xy)^n = (xy)^{n+1} (xy)^{-1} = x^{n+1} y^{n+1} y^{-1} x^{-1} = x^{n+1} y^n x^{-1}, \quad (\forall) x, y \in G$$

Conform lui (i) avem că $y^n x^{-1} = x^{-1} y^n$ deci

$$(xy)^n = x^{n+1} x^{-1} y^n = x^n y^n, \quad (\forall) x, y \in G$$

adică ψ este un endomorfism.

În cazul particular $n = 2$ obținem conform lui (i) că

$$xy = yx, (\forall) x, y \in G$$

adică G este abelian.

TESTUL DAT LA ETAPA a II-a LOCALĂ, 22 FEBRUARIE 1987

1°. Să se calculeze primitivele funcției

$$f(x) = \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Soluție: Utilizând formulele trigonometrice putem scrie:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x + \cos x} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x - \cos 3x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(2x-x) - \cos(2x+x)}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \sin x - \cos 2x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{4} (\sin 2x - \cos 2x). \end{aligned}$$

Din egalitatea obținută: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{4} (\sin 2x - \cos 2x)$ rezultă că

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{8} (\sin 2x + \cos 2x) + C$$

și ținând seama de faptul că pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ are loc $\sin x + \cos x > 0$, și deci

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4} \ln(\sin x + \cos x) - \frac{1}{8} (\sin 2x + \cos 2x) + C.$$

2°. Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sînt izomorfe, iar grupurile $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, +)$ nu sînt izomorfe.

Soluție: Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ este bijectivă, fiind inversabilă, cu inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = e^x$ și este morfism între

grupurile $(\mathbb{R}_+^{\times}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ deoarece $f(xy) = \ln(xy) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}_+^{\times}$.

Fiind morfism bijectiv, funcția f este izomorfism, deci grupurile $(\mathbb{R}_+^{\times}, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +)$ sînt izomorfe.

Vom demonstra acum prin reducere la absurd că grupurile $(\mathbb{Q}_+^{\times}, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, +)$ nu sînt izomorfe. Să presupunem deci că aceste grupuri sînt izomorfe, adică există o bijecție $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_+^{\times}$ cu proprietatea că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$. În particular, pentru $x = y = \frac{a}{2}$ rezultă $f(a) = (f(\frac{a}{2}))^2 \Leftrightarrow f(\frac{a}{2}) = \sqrt{f(a)}$ (1).

Funcția f fiind bijectivă este surjectivă adică pentru orice $y \in \mathbb{Q}_+^{\times}$, există $x \in \mathbb{Q}$ astfel încît $y = f(x)$. În particular există $x_0 \in \mathbb{Q}$ astfel încît $f(x_0) = 2$. Luînd în relația (1) pe a egal cu x_0 obținem că $f(\frac{x_0}{2}) = \sqrt{f(x_0)} = \sqrt{2}$ și deoarece f ia valori raționale pozitive, rezultă că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_+^{\times}$ care este o contradicție. Rezultă astfel că presupunerea făcută a fost falsă, deci grupurile $(\mathbb{Q}_+^{\times}, \cdot)$ și $(\mathbb{Q}, +)$ nu sînt izomorfe.

3°. Să se calculeze primitivele funcției $f_n: \mathbb{R}_+^{\times} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n \sqrt{1+x^2}}$$

unde n este un număr natural.

Soluție: Vom stabili în prealabil o relație de recurență pentru calculul primitivelor funcției f_{n+2} în funcție de cele ale funcției f_n .

Avem:

$$\begin{aligned} \int f_n(x) dx &= \int \frac{dx}{x^n \sqrt{1+x^2}} = \int \frac{x dx}{x^{n+1} \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \int \frac{1+x^2}{x^{n+2} \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}} + (n+1) \left(\int f_n(x) dx + \int f_{n+2}(x) dx \right) \\ \Rightarrow \int f_{n+2}(x) dx &= -\frac{n}{n+1} \int f_n(x) dx - \frac{\sqrt{1+x^2}}{(n+1)x^{n+1}} \quad (1) \end{aligned}$$

Să observăm că datorită relației (1) putem reduce calculul primitivelor oricăreia dintre funcțiile f_n la calculul primitivelor uneia dintre funcțiile f_0 sau f_1 .

Pentru aceasta avem:

$$\int f_0(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C, \text{ respectiv}$$

$$\int f_1(x) dx = \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^2}} = - \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}} = - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\right)^2$$

$$+ C = - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) + C = \ln \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C$$

Pentru $n = 2k$, cu $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă atunci că

$$\int f_{2k}(x) dx = \sqrt{1+x^2} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{x^{2k-2j+1}} \cdot \frac{(2k-2j-1)!!}{(2k-1)!!} \cdot \frac{(2k-2j)!!}{(2k-2j)!!} \quad (2)$$

Pentru $n = 2k+1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$ rezultă că

$$\begin{aligned} \int f_{2k+1}(x) dx &= \sqrt{1+x^2} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{x^{2(k-j)+1}} \cdot \frac{(2k-2j)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k-2j+1)!!} + \\ &+ (-1)^k \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C \quad (3) \end{aligned}$$

Demonstrația relațiilor (2) și (3) se poate face ușor prin metoda inducției matematice.

4°. În algebra abstractă se numește inel o structură algebrică ca cea din manual, numai că nu se presupune existența elementului neutru la înmulțire. Un asemenea inel se zice comutativ dacă înmulțirea este comutativă și se zice unitar dacă există unitate (element de efect neutru la înmulțire).

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel comutativ. Pentru $a, b \in A$ se spune că a divide pe b dacă există $c \in A$ astfel ca $b = ac$. Să se demonstreze că dacă toate elementele inelului A au un divizor comun, atunci A este inel unitar.

* * *

Soluție: Să notăm cu d divizorul comun al tuturor elementelor din A . Deoarece $d \in A$ rezultă în particular că d se divide pe sine însuși, adică există $e \in A$ astfel ca $d = ed = de$ (1)

Să demonstrăm acum că pentru orice $a \in A$ are loc $ae = ea = a$, adică e este element unitate.

Intr-adevăr, deoarece d divide pe a , rezultă că există $c \in A$, astfel ca $a = dc$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $ea = edc = dc = a$ și respectiv $ae = dce = dec = dc = a$ } $\Rightarrow ae = ea = a$

oricare ar fi $a \in A$ adică e este element unitate pentru inelul A , deci A este inel unitar.

5°. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Se știe că pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

există primitive pe $\mathbb{R}$.

Să observăm că și funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h = g - f$, adică

$$h(x) = \begin{cases} 2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$, deoarece este funcție continuă.

Rezultă atunci că funcția f , care este diferența lui g și h are primitive pe $\mathbb{R}$.

Să demonstrăm acum că într-adevăr funcția g are primitive pe $\mathbb{R}$.

Pentru aceasta să considerăm funcția $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Pentru $x \neq 0$ funcția T este derivabilă și avem $T'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$

De asemenea, deoarece există $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T(x) - T(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$, rezultă că T este derivabilă și în zero și are loc $T'(0) = 0$. Prin urmare

funcția

$$t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este derivata funcției T .

Observăm că funcția $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

are primitive pe $\mathbb{R}$, fiind continuă. Rezultă atunci că funcția g are primitive pe $\mathbb{R}$, fiind diferență de funcții derivate.

6°. Să se demonstreze sau să se infirme propoziția:

Dacă fiecare subgrup S (cu $S \neq G$) al grupului G este finit, atunci G este finit.

Soluție: Vom infirma propoziția din enunț, dând un exemplu de grup G infinit, având toate subgrupurile proprii S finite.

Fie $(G, \cdot) = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} G_{p^i}, \cdot \right)$, unde p este număr prim, iar $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k = \overline{0, n-1} \right\}$.

Evident, grupul G are subgrupuri proprii, deoarece fiecare din mulțimile G_{p^i} formează grup în raport cu înmulțirea. Mai mult chiar, au loc incluziunile

$$G_0 \subset G_p \subset G_{p^2} \subset \dots \subset G_{p^n} \subset \dots \subset G$$

Să demonstrăm acum că dacă S este un subgrup infinit al lui G , atunci $S = G$, adică pentru orice $i \in \mathbb{N}$ avem $G_{p^i} \subset S$.

Să presupunem că S este un subgrup infinit al lui G și că există $i_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $G_{p^{i_0}} \not\subset S \Leftrightarrow (\exists) a \in G_{p^{i_0}}$ astfel încât $a \notin S$.

Să demonstrăm că în acest caz $(G - G_{p^{i_0}}) \cap S = \emptyset$. Intr-adevăr, dacă am presupune că există $z \in S$ cu $z \in G - G_{p^{i_0}} \rightarrow z = \cos \frac{2k_1\pi}{p^{i_1}} + i \sin \frac{2k_1\pi}{p^{i_1}}$

unde $i_1 > i_0$ și $(k_1, p) = 1$.

Dacă notăm acum $a = \cos \frac{2k_0\pi}{p^{i_0}} + i \sin \frac{2k_0\pi}{p^{i_0}}, (k_0, p) = 1$ și observăm

că grupul G_{p_0} este ciclic și generat de orice element z_0 al său de forma $z_0 = \cos \frac{2k\pi}{p_0} + i \sin \frac{2k\pi}{p_0}$ cu $(k, p_0) = 1$ rezultă că elementul $z^{p_0^{i_1-1}} = \cos \frac{2k_1\pi}{p_0^{i_1-1}} + i \sin \frac{2k_1\pi}{p_0^{i_1-1}}$ generează grupul $G_{p_0^{i_1-1}}$, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $a = (z^{p_0^{i_1-1}})^m = z^{mp_0^{i_1-1}}$. Dar cum $z \in S \Rightarrow a \in S$ obținem o contradicție $\Rightarrow (G - G_{p_0}) \cap S = \emptyset \Rightarrow S \subset G_{p_0}$. Dar G_{p_0} este un grup finit și deci S este finit care este o contradicție. Din contradicția obținută rezultă că pentru orice $i \in \mathbb{N}$ are loc $G_{p_0^i} \subset S \Rightarrow G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_{p_0^i} \subset S \subset G \Rightarrow G = S$, deci singurul subgrup infinit al lui G este G , care nu este subgrup propriu. Am demonstrat deci că există un subgrup infinit avînd doar subgrupuri proprii finite, deci propoziția din enunț este falsă.

Probleme de rezervă pentru testul II

3'. Dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive, atunci funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x| f(x)$ admite primitive.

Soluție: Fie F o primitivă a funcției f . Fiind derivabilă, ea este continuă și deci admite primitive. Fie atunci $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției F .

Să considerăm acum funcția $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x) = xf(x)$. Deoarece $(xF(x))' = xf(x) + F(x) = g_1(x) + (G(x))'$ rezultă $g_1(x) = (xF(x) - G(x))'$, deci g_1 admite primitive pe $\mathbb{R}$ și fie G_1 o primitivă a sa.

Fie acum $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x) = -xf(x)$. Avem $(-xF(x))' = -f(x)x - F(x) = g_2(x) - (G(x))' \Rightarrow$ rezultă $g_2(x) = (G(x) - xF(x))'$, deci g_2 admite primitive și fie G_2 o primitivă a sa.

Atunci funcția $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} G_1(x) + c_1, & x > 0 \\ H(0) = a, & x = 0 \\ G_2(x) + c_2, & x < 0 \end{cases}$

unde $c_1 = a - G_1(0)$ și $c_2 = a - G_2(0)$, iar $a \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției g , deci g admite primitive.

4'. Fie a, b elemente ale unui inel finit astfel încât $ab^2 = b$. Să se demonstreze că $bab = b$.

Soluție: Intrucît inelul este finit, $b, b^2, b^3, \dots$ nu pot fi toate diferite, așadar există $i, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $b^i = b^{i+k}$. Atunci

$$ab^2 \cdot b^{i+k-2} = b \cdot b^{i+k-2}$$

adică

$$ab^i = b^{i+k-1}$$

Dacă $i \geq 2$ atunci relația de mai sus înseamnă

$$ab^2 \cdot b^{i-2} = b^{i+k-1}$$

adică

$$b^{i-1} = b^{i-1+k}$$

Așadar din $b^i = b^{i+k}$ am dedus $b^{i-1} = b^{i-1+k}$ (dacă $i \geq 2$). Rezultă (prin inducție) că $b = b^{k+1}$. Prin urmare

$$bab = bab^{k+1} = b(ab^2)b^{k-1} = b \cdot b \cdot b^{k-1} = b^{k+1} = b$$

Observație. De obicei e bine să ne punem, în cazul cînd nu reușim să rezolvăm o problemă, întrebarea: am folosit oare toate datele din enunț? În cazul nostru enunțul are date inutile: din structura de inel s-a folosit numai operația de înmulțire și asociativitatea ei.

5'. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{\arctg x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Se știe că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

are primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Să demonstrăm

că această funcție este continuă. Evident ea este continuă pe $\mathbb{R} - \{0\}$ ca sumă de funcții continue. Rămâne să arătăm că h este continuă și în punctul $x = 0$.

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \right] \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \right] \end{aligned}$$

Să calculăm acum

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \right] &= 2 \sin \left[\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \right] = \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x \operatorname{arctg} x} \right) = 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1}{\operatorname{arctg} x} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2+1} - 1}{\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}} \right) = 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x+(x^2+1)\operatorname{arctg} x} \right) = \end{aligned}$$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{1+2x \operatorname{arctg} x + 1} \right) = 2 \sin \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 \sin 0 = 0.$$

Deoarece $\left| \sin \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right) \right] \right| \leq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$, deci h este continuă pe $\mathbb{R}$ și prin urmare h are primitive pe $\mathbb{R}$. Deducem că $f = g + h$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

6'. Un inel boolean este un inel în care $x^2 = x$ pentru fiecare element x al inelului. Elementul a al unui inel se zice nilpotent dacă $a^n = 0$ pentru un întreg pozitiv n . Demonstrați că un inel este boolean dacă și numai dacă este comutativ, nu conține elemente nilpotente (ne-nule) și $ab(a+b) = 0$ pentru toți a, b .

Soluție: Dacă inelul este boolean, prin inducție se verifică imediat că $x^n = x$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru x, y din inel, $x + xy + yx + y = x^2 + xy + yx + y^2 = (x+y)^2 = x+y$ deci

$$(*) \quad xy + yx = 0$$

Dar

$$(x+x) = (x+x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x,$$

deci

$$x + x = 0$$

adică

$$x = -x$$

pentru fiecare x și relația $(*)$ se scrie

$$xy = -yx = yx$$

așadar inelul este comutativ.

Atunci $ab(a+b) = aba + ab^2 = a^2b + ab^2 = ab + ab = 0$ și $x^n = 0$ înseamnă $x = 0$ deci nu există elemente nilpotente nenule.

Să presupunem acum că inelul este comutativ, fără elemente nilpotente nenule și $ab(a+b) = 0$ pentru toți a și b . Atunci pentru $b = -a^2$ obținem $a^4 = a^5$ și $a^5 = a^6$, iar $(x^3 - x^2)^2 = x^6 - x^5 - x^5 + x^4 = 0$, deci $x^3 - x^2 = 0$ adică $x^2 = x^3$ și prin inducție (înmulțind cu x), $x^2 = x^n$ pentru $n \geq 2$. Dar $(x-x^2)^2 = x^2 - x^3 - x^3 + x^4 = 0$ deci $x-x^2$ fiind nilpotent este nul, deci $x^2 = x$ adică inelul este boolean. Observați că nu s-a folosit în reciprocă, comutativitatea.

NOTA. Ca în problema 4, inelul poate fi "fără unitate". Dacă inelul este unitar (deci ca în manual) atunci $a = b = 1$ dă $1+1 = 0$ deci $a.1(a+1) = 0$ înseamnă $a^2 + a = 0$ și $a^2 = -a = a$ adică reciproca de mai sus nu cere nici lipsa elementelor nilpotente nenule.

TESTUL DAT LA ETAPA a III-a LOCALĂ, 29 MARTIE 1987.

1°. Fie A un inel astfel încât $x^6 = x$ pentru oricare $x \in A$. Să se arate că $x^2 = x$ pentru toți $x \in A$.

* * *

Soluție: Înlocuind în relația din enunț pe x cu $-x$ obținem:

$$-x = (-x)^6 = x^6 - x \Rightarrow x + x = 0, \quad (\forall) x \in A.$$

Au loc atunci următoarele egalități:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 1;$$

$$(x+1)^3 = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1;$$

$$(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x^2+1)^2 = x^4 + 1;$$

$$(x+1)^5 = (x+1)(x^4+1) = x^5 + x^4 + x + 1;$$

$$(x+1)^6 = (x+1)(x^5 + x^4 + x + 1) = x^6 + x^4 + x^2 + 1;$$

Dar din enunț avem că $x = x^6$ oricare ar fi $x \in A$ și deci $x+1 = (x+1)^6$, oricare ar fi $x \in A \Rightarrow x+1 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 = x + x^4 + x^2 + 1 \Rightarrow x^4 + x^2 = 0 \Rightarrow x^4 = -x^2 = x^2$ oricare ar fi $x \in A$

$$x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2, \text{ oricare ar fi } x \in A,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

2°, Să se calculeze limita șirului $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin

$$s_n = n \left[\frac{1}{(2n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^2} \right]$$

Soluție: Avem:

$$\begin{aligned} s_n &= n \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(4n-1)^2} \right] = \\ &= n \left[\frac{1}{n^2(2+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{n^2(2+\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{n^2(2+\frac{2n-1}{n})^2} + \frac{1}{n^2(2+\frac{2n}{n})^2} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2+\frac{k}{n})^2} - \frac{1}{16n} = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) - \\ &- \frac{1}{16n}, \text{ unde } f \text{ este o funcție } f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(2+x)^2}, \end{aligned}$$

$\Delta_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n} = 2)$ este o diviziune a intervalului $[0,2]$, iar $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \frac{2n}{n} = 2)$ este un sistem de puncte intermediare. Să observăm că $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$. Deoarece funcția f este continuă, ea este integrabilă pe $[0,2]$ și are loc egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \int_0^2 \frac{dx}{(2+x)^2} = -\frac{1}{x+2} \Big|_0^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Rezultă atunci că există } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16n} = \frac{1}{4}.$$

și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4}$.

3°. Să se demonstreze că pentru fiecare grup finit cu cel puțin trei elemente există cel puțin un automorfism diferit de cel identic.

Soluție: Fie G grupul considerat și $a \in G$. Atunci funcția $\varphi_a: G \rightarrow G$, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$ este în mod evident un automorfism, deoarece este bijectivă (avem $\varphi_a \circ \varphi_{a^{-1}} = \varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = 1_G$) și reprezintă un endomorfism. Intr-adevăr are loc $\varphi_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$, oricare ar fi $x, y \in G$.

Rămâne de văzut în ce condiții acest automorfism este diferit de cel identic.

Avem $\varphi_a = 1_G \Leftrightarrow axa^{-1} = x, (\forall) x \in G \Leftrightarrow ax = xa, (\forall) x \in G \Leftrightarrow a \in C(G)$, deci $\varphi_a \neq 1_G \Leftrightarrow a \in G - C(G)$.

Deci dacă grupul G nu este abelian, adică $G - C(G) \neq \emptyset$, rezultă că există un automorfism al lui G diferit de cel identic. (1)

Să presupunem acum că grupul G este abelian, deci $\varphi_a = 1_G, (\forall) a \in G$. Să considerăm în acest caz funcția $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(x) = x^{-1}$. Funcția φ este bijectivă, deoarece $\varphi \circ \varphi = 1_G$ și în plus este endomorfism, deoarece $\varphi(xy) = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $(\forall) x, y \in G \Rightarrow \varphi$ este automorfism.

Pentru acest automorfism avem $\varphi \neq 1_G \Leftrightarrow (\exists) x \in G: x^{-1} = \varphi(x) \neq x \Leftrightarrow (\exists) x \in G: x^2 \neq e$, unde e este element neutru al grupului G ($\forall) x \in G: O(x) > 2$).

Deci dacă există $x \in G$ avînd ordinul mai mare decît 2, atunci automorfismul φ al lui G este diferit de cel identic. (2)

Fie acum G un grup avînd toate elementele de ordin cel mult 2 și fie S un sistem minimal de generatori ai grupului G . Atunci pentru orice $a \in G$ există și sînt unice elementele $s_1, \dots, s_k \in S$ astfel ca $a = s_1 \dots s_k \Leftrightarrow (\exists)$ și sînt unice numerele $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ astfel ca $a =$

$= \prod_{s \in S} \alpha_s$. Deoarece G are cel puțin trei elemente, rezultă că S are cel puțin două elemente, deci putem să alegem $a_1, a_2 \in S$, $a_1 \neq a_2$. Să demonstrăm că atunci funcția $f: G \rightarrow G$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x = \prod_{s \in S} \alpha_s \text{ și } \alpha_{a_1} \neq \alpha_{a_2} \\ \alpha_{a_2} \alpha_{a_1} \prod_{s \in S - \{a_1, a_2\}} \alpha_s & \text{dacă } x = \prod_{s \in S} \alpha_s \\ & \alpha_{a_1} \neq \alpha_{a_2} \end{cases}$$

și este un automorfism diferit de cel identic.

Intr-adevăr, deoarece $f(a_1) = a_2 \Rightarrow f \neq 1_G$.

$(f \circ f)(x) = x$, $(\forall) x \in G \Rightarrow f \circ f = 1_G \Rightarrow f$ - bijecție.

De asemenea se observă ușor că f este endomorfism, deci rezultă că f este automorfism diferit de 1_G . (3)

Din (1), (2) și (3) rezultă că pentru fiecare grup cu cel puțin trei elemente există un automorfism diferit de cel identic.

4°. Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

Soluție: Călea

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} dx = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1 + \sqrt{x}}\right) \sqrt{x}' dx = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2\sqrt{2} - 2\ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

conține greșeala de principiu că s-a folosit formula de schimbare de variabilă pentru $\varphi(x) = \sqrt{x}$ care ar trebui să aibă derivată continuă pe $[0, 2]$, ori ea nu e derivabilă în zero,

$$\text{Pornind însă de la } \int_0^{\sqrt{2}} \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t} dt = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \sqrt{t^2}} (t^2)' dt = \int_0^2 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

(funcția $\varphi(t) = t^2$ satisface cerințele manualului) se ajunge la același rezultat de astă dată pe calea corectă.

5°. Fie $a < b$ numere reale și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă strict crescătoare. Din teorema de medie se știe că pentru fiecare p există (un unic) x_p pentru care

$$f^p(x_p) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(t) dt.$$

Să se calculeze

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p.$$

Soluție: Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că $f(x) \leq f(b)$, $(\forall) x \in [a, b] \Rightarrow f^p(x) \leq f^p(b)$, $(\forall) p \in \mathbb{R}$, $(\forall) x \in [a, b] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(x) dx \leq f^p(b) \Rightarrow f(x_p) \leq f(b).$ (1)

Deoarece f este continuă, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, $(\exists) \eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $|x-b| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (b-\eta_\varepsilon, b) \Rightarrow f(x) \in (f(b)-\varepsilon, f(b))$. Atunci are loc:

$$\begin{aligned} f(x_p) &= \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^p(x) dx \right)^{1/p} \geq \left(\frac{1}{b-a} \int_{b-\eta_\varepsilon}^b f^p(x) dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(\frac{1}{b-a} \cdot \eta_\varepsilon \cdot f^p(c_\varepsilon) \right)^{1/p} = \left(\frac{\eta_\varepsilon}{b-a} \right)^{1/p} \cdot f(c_\varepsilon) \geq \left(\frac{\eta_\varepsilon}{b-a} \right)^{1/p} (f(b)-\varepsilon) \end{aligned}$$

unde $c_\varepsilon \in (b-\eta_\varepsilon, b)$.

Trecînd la limită în relațiile (1) și (2) după $p \rightarrow \infty$ avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ au loc inegalitățile

$$f(b) - \varepsilon \leq \lim_{p \rightarrow \infty} f(x_p) \leq f(b) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(x_p) = f(b).$$

Dar deoarece f este continuă rezultă $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x_p) = f(\lim_{p \rightarrow \infty} x_p) \Rightarrow f(\lim_{p \rightarrow \infty} x_p) = f(b) \Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = b.$

6°. Un inel $(A, +, \cdot)$ se numește "inel boolean" dacă $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$. Un exemplu de inel boolean este $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ unde X este o mulțime arbitrară; Δ este "diferența simetrică".

Să se demonstreze sau să se infirme afirmația:

Dacă A este un inel boolean finit, atunci numărul elementelor lui A este o putere naturală a lui 2.

Soluție: $x^2 = x$, $(\forall) x \in A \Rightarrow -x = (-x)^2 = x^2 = x$, $(\forall) x \in A \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2x = x + x = 0$, $(\forall) x \in A$.

Vom arăta în continuare că $|A| = 2^k$, cu $k \in \mathbb{N}$, adică propoziția din enunț este adevărată.

Fie S un sistem minimal de generatori al grupului $(A, +)$, adică $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ cu $a_1, \dots, a_k \in A$ cu proprietatea că pentru orice $a \in A$, există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ astfel încît $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, dar oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ nu există $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k$ numere naturale cu

$$a_i = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1} + \alpha_{i+1} a_{i+1} + \dots + \alpha_k a_k$$

Deoarece în plus $2x = 0$ oricare ar fi $x \in A$ rezultă că pentru orice $a \in A$ există și sînt unice numerele $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \{0, 1\}$ astfel ca $a = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$. Dar atunci înseamnă că funcția $f: A \rightarrow \{0, 1\}^k$, $f(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ este o bijecție, de unde rezultă că $|A| = 2^k$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Probleme de rezervă pentru testul III

1'. Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} \, dx$$

Soluție: Avem

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos x} \, dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \, dx = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} \, dx = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin y \, dy \\ &= 2\sqrt{2} (-\cos y) \Big|_0^{\pi} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2'. Demonstrați că dacă într-un inel $x^2 = x$ pentru orice x , atunci $1 + 1 = 0$ și inelul este comutativ.

Soluție: $x^2 = x$, $(\forall) x \in A \Rightarrow -1 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow 1 + 1 = 0$.

$$\Rightarrow 1+1 = 0 \Rightarrow x(1+1) = 0 \Rightarrow x + x = 0, (\forall) x \in A.$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= x, (\forall) x \in A \Rightarrow (x+y)^2 = x+y, (\forall) x, y \in A \\ \text{Dar } (x+y)^2 &= x^2 + xy + yx + y^2 = x+y+xy+yx \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy + yx = 0, (\forall) x, y \in A \Rightarrow xy = -yx = yx, (\forall) x, y \in A,$$

deci inelul A este comutativ.

3'. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care $af(x) + bf(-x) = c$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde a, b, c sînt numere reale date cu $a+b \neq 0$.

Să se calculeze

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

Soluție:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \frac{1}{a+b} \int_{-1}^1 (af(x) + bf(x)) dx = \\ &= \frac{1}{a+b} \left(\int_{-1}^1 af(x) dx + \int_{-1}^1 bf(x) dx \right) = \frac{1}{a+b} \left(\int_{-1}^1 af(x) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^1 bf(-x) dx \right) = \frac{1}{a+b} \int_{-1}^1 (af(x) + bf(-x)) dx = \frac{1}{a+b} \int_{-1}^1 c dx = \\ &= \frac{2c}{a+b}. \end{aligned}$$

4'. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ. Să se arate că grupurile $(K, +)$ și $(K - \{0\}, \cdot)$ nu sînt izomorfe.

Soluție: Evident că dacă K este finit, atunci $|K| \neq |K - \{0\}| \Rightarrow$
 $\Rightarrow (K, +) \not\cong (K - \{0\}, \cdot)$.

Dacă K este infinit vom demonstra afirmația din enunț prin reducere la absurd. Să presupunem deci că grupurile $(K, +)$ și $(K - \{0\}, \cdot)$ ar fi izomorfe, adică există funcția $f: K - \{0\} \rightarrow K$ care să fie bijectivă și în plus să satisfacă relația

$$f(xy) = f(x) + f(y), (\forall) x, y \in K - \{0\}.$$

$$1 \neq 0 \Rightarrow 1 \in K - \{0\} \Rightarrow f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1) + f(-1) = f(-1)(1+1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\text{sau } 1 + 1 = 0.$$

Dacă $f(-1) = 0 \Rightarrow -1 = 1$, deoarece f este bijectie, deci și injectie $\Rightarrow 1 + 1 = 0$.

Dar atunci, pentru orice $a \in K - \{0\}$ rezultă că

$$f(a^2) = f(a) + f(a) = f(a)(1 + 1) = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 + a + a + 1 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1, \text{ de unde}$$

rezultă că $K = \{0, 1\}$, deci $|K| < \infty$ - contradicție.

Din contradicția obținută rezultă că presupunerea făcută a fost falsă, deci $(K, +) \not\cong (K - \{0\}, \cdot)$.

TESTUL DAT LA ETAPA JUDEȚEANĂ, 24 MAI 1987, CLASA a XII-a.

1°. Să se determine mulțimea $\mathcal{P}$ a acelor polinoame $P \in \mathbb{R}[X]$ pentru care

$$\int_0^{2x} P(t) dt = \frac{1}{3} x [P(0) + 4P(x) + P(2x)], \quad (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

2°. Fie $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și integrabilă. Să se demonstreze că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ și $x \in (a, b]$ există $c \in (a, x)$ astfel încât

$$(n+1) \int_a^x (x-t)^n g(t) dt = (x-a)^{n+1} g(c).$$

Să se deducă de aici că dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este de $(n+1)$ ori derivabilă, iar $f^{(n+1)}$ este integrabilă atunci pentru orice $x \in [a, b]$, există $c \in [a, x]$ cu

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

3°. Fie $X = \{1, 2, \dots, n\}$ și A o mulțime de funcții $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$, care formează grup cu adunarea, este parte stabilă la înmulțire și nu conține funcția constantă 1. Să se arate că există $k \in X$ și p un număr prim pentru care p divide $f(k)$ pentru fiecare $f \in A$.

4°. Fie $\mathcal{X} = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ submulțimi ale lui $\mathcal{X}$ pentru care

- (i) $(f, g \in \mathcal{X}_k, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{X}_k), (\forall) k \in \{0, 1, \dots, n\}$
- (ii) $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \dots \cup \mathcal{X}_n$

Să se demonstreze că există $i, 1 \leq i \leq n$, pentru care $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_i$.

x x x

BAREM DE CORECTARE - CLASA a XII-a - ETAPA JUDETEANA

1°. Din oficiu 1p. Polinoamele constante sînt în $\mathcal{P}$ (2p).

Dacă $P \in \mathcal{P}$ și $\text{grad } P = n > 0$, $P = a_0 x^n + \dots$ atunci identificînd coeficienții lui x^{n+1} , $\frac{2^{n+1}}{n+1} = \frac{2^n}{3} + \frac{4}{3}$ (2p). De aici $n < 5$ și

$n \in \{1, 2, 3\}$, (2p). Dacă $f, g \in \mathcal{P}$ atunci $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$, (1p).

$1, x, x^2, x^3 \in \mathcal{P}$, (1p) deci $\mathcal{P} = \{f = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ (1p).

2°. Din oficiu (1p). Presupunem prin absurd $g(s) < \frac{n+1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (x-t)^n g(t) dt$, $(\forall) s \in (a, x)$, (2p) și amplificînd cu $(x-s)^n$ și integrînd după s pe $[a, x]$ ajungem la contradicție, (2p), deci există $s_1 \in (a, x)$ cu $g(s_1) \geq \frac{n+1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (x-t)^n g(t) dt$, (1p). Analog, există $s_2 \in (a, x)$ cu $g(s_2) \leq \frac{n+1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (x-t)^n g(t) dt$ deci cu proprietatea lui Darboux pentru g , există c căutat (1p).

Considerînd $g = f^{(n+1)}$, prin integrare prin părți,

$$I_n = (n+1) \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = -(n+1)(x-a)^n f^{(n)}(a) + (n+1)I_{n-1} \quad (1p)$$

de unde, prin recurență

$$I_n = - \left(\frac{(n+1)!}{n!} (x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{(n+1)!}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \dots + \frac{(n+1)!}{1!} (x-a) f'(a) - (n+1)! I_0 \right)$$

și folosind prima parte, prin împărțire cu $(n+1)!$ obținem afirmația (4p)

3°. Din oficiu (1p). Multimea $M_k = \{f(k) | f \in A\}$ este subgrup al lui $(Z, +)$ (2p) deci sau Z sau $m \cdot Z$ cu $m \notin \{1\}$ (1p). Dacă $M_k = Z$, $(\forall) k = 1, 2, \dots, n$ atunci $(\forall) k, (\exists) f_k \in A$ cu $f_k(k) = 1$, (2p). Atunci funcția $g = (1-f_1)(1-f_2)\dots(1-f_n)$ este identic nulă deci $1 = \sum f_i - \sum f_i f_j + \dots + (-1)^n f_1 f_2 \dots f_n \in A$, absurd (3p), deci există k cu $M_k = m \cdot Z \neq Z$. Fie p un divizor prim al lui m , atunci p divide $f(k)$ oricare ar fi $f \in A$. (1p),

4°. Din oficiu (1p). Extragem $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ minimală cu $x_0 = x_{i_1} \cup x_{i_2} \dots \cup x_{i_m}$ (2p). Dacă $m = 1$ problema este rezolvată (1p), în caz contrar există $f \in x_{i_1} - (x_{i_1} \cup x_{i_3} \cup \dots \cup x_{i_m})$, $g \in x_{i_2} - (x_{i_1} \cup x_{i_3} \cup \dots \cup x_{i_m})$ (1p) și considerînd $f, f+g, f+2g, \dots, f+mg$ (2p) deducem că există k și $0 < s < j \leq m$ cu $f+sg \in x_{i_k}$, $f+jg \in x_{i_k}$, deci $(j-s)g \in x_k$, $g \in x_{i_k}$ de unde $i_k = i_2$ și $f+sg \in x_{i_2}$ deci $f \in x_{i_2}$, (3p), absurd.

Notă. Programul de pregătire la matematică prin teste și comentarii parcurs în mod experimental la Universitatea din Timișoara a fost coordonat de lector universitar Gh. Eckstein, la clasa a XII-a. Soluțiile au fost redactate respectiv de M. Chiș, elev, Timișoara (testul de la etapele a doua și a treia, locale) și A. Constantin, elev, Timișoara (testul de la etapa a I-a locală), sub îndrumarea lect. univ. Gh. Eckstein.

4. SOLUTII LA PROBLEMELE DATE LA EDITIA a III-a A CONCURSULUI
"TRAIAN LALESCU" INEU, 1987.

Testul Nr.1, clasa a XII-a, 5 iunie 1987.

1°. Să se descrie toate grupurile care au proprietatea că oricare ar fi H un subgrup al lui G și oricare ar fi $x, y \in G$, dacă $xy \in H$ atunci $x, y \in H$ sau $x = y^{-1}$.

* * *

Soluție: Să presupunem că G este un grup cu proprietatea din enunț și că H ar fi un subgrup al lui G , diferit de $\{e\}$ și de G .

Există atunci $x \in G - H$ și $a \in H$, $a \neq e$. Luând $y = x^{-1}a$ am avea $xy = a \in H$ cu toate că $y \neq x^{-1}$ și $x \notin H$, $y \notin H$ o contradicție.

Am văzut deci că dacă G are proprietatea din enunț atunci singurele subgrupuri ale sale pot fi doar $\{e\}$ și G . Reciproc dacă un grup G are singurele subgrupuri $\{e\}$ și G , este evident atunci că el are proprietatea din enunț.

Să descriem acum grupurile G cu proprietatea că nu au ca subgrupuri decât pe $\{e\}$ și G . Unul din aceste grupuri este grupul $\{e\}$. Să presupunem că G conține și un $x \neq e$. Atunci grupul ciclic generat de x , adică grupul $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, trebuie să coincidă cu G deci pentru orice $y \in G$ există $n \in \mathbb{Z}$ cu $y = x^n$. În particular dacă $x^2 \neq e$ argumentul anterior se aplică și subgrupului $\{(x^2)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ așadar există $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $x = (x^2)^n$ de unde $x^{2n-1} = e$ și deci mulțimea $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ este finită adică grupul G este finit și ciclic adică de forma $\{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\} = G$. Dacă d este un divizor propriu al lui n , $\{e, x^d, x^{2d}, \dots\}$ este un subgrup al lui G care nu coincide cu G sau $\{e\}$ deci n trebuie să fie număr prim. Așadar grupurile cu proprietatea din enunț sînt grupurile ciclice finite de ordin prim și grupul trivial $\{e\}$.

2°. Fie I un interval și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că f este monotonă dacă și numai dacă pentru oricare $a, b \in I$, $a \neq b$, avem $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ este cuprins între $f(a)$ și $f(b)$.

Gh. Siretchi, lector dr., Univ. București.

Soluție: Dacă f este crescătoare și $a < b$, cu teorema de medie există $c \in (a, b)$ astfel încît $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ și evident $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$. La fel se procedează în celelalte cazuri ($a > b$ sau f descrescătoare).

Să presupunem acum că f nu e monotonă. Atunci există $a, b, c \in I$ cu $a < c < b$ și $f(c)$ nu este cuprins între $f(a)$ și $f(b)$. Putem presupune că $f(a) < f(c) > f(b)$. Fie $v \in (f(a), f(c)) \cap (f(b), f(c))$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux mulțimile

$$A = \{x \in (a, c) \mid f(x) = v\}$$

$$B = \{x \in (c, b) \mid f(x) = v\}$$

sînt nevide.

Fie $a_1 = \sup A$, $b_1 = \inf B$. Avem sau $a_1 \in A$ (deci $f(a_1) = v$), sau $a_1 \notin A$ și atunci există $x_n \in A$ cu $\lim x_n = a_1$ și utilizînd continuitatea lui f iarăși se deduce $f(a_1) = v$. Dacă $t \in (a_1, c)$ atunci $f(t) > v$ căci în caz contrar din $t \in (a_1, c)$ și $f(t) \leq v$ și $f(c) > v$ am deduce existența unui $x \in [t, c)$ cu $f(x) = v$ ceea ce ar contrazice faptul că $a_1 = \sup A$.

Analog se demonstrează că $f(b_1) = v$ și că $f(t) > v$ pentru orice $t \in (c, b_1)$. Dar atunci

$$\frac{1}{b_1 - a_1} \int_{a_1}^{b_1} f(t) dt > v$$

nu este cuprins între $f(a_1)$, $f(b_1)$ (care sînt egale cu v). Cu aceasta demonstrația este încheiată.

3°. Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Să se demonstreze că mulțimea bijecțiilor $\varphi: A \rightarrow A$ care au proprietatea că $f \circ \varphi = f$ formează un grup

(cu operația de compunere). Să se determine acest grup pentru $f: \mathbb{R} - \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}$$

și să se rezolve ecuația $f(x) = f(a)$.

Soluție: Pentru a demonstra că mulțimea de bijecții din enunț este grup este suficient să arătăm că ele formează un subgrup în grupul bijecțiilor lui A . Ori, este evident că dacă $f \circ \varphi_1 = f$ și $f \circ \varphi_2 = f$ atunci $f \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) = f$ deci mulțimea noastră este o parte stabilă, $f \circ 1_A = f$ (conține unitatea) și dacă $f \circ \varphi = f$ atunci $f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = f$, așadar mulțimea e grup.

Fie G grupul din enunț, pentru funcția concret dată. Problema determinării acestui grup este intim legată de rezolvarea ecuațiilor $f(x) = f(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Vom rezolva complet problema dar vom indica în continuare și alte căi de rezolvare a acestei probleme.

Se poate observa că $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1-x$ și $\varphi_3(x) = \frac{1}{x}$ aparțin grupului G . Intrucât G este grup, mai aparțin lui G și bijecțiile $\varphi_4(x) = (\varphi_3 \circ \varphi_2)(x) = \frac{1}{1-x}$, $\varphi_5(x) = (\varphi_2 \circ \varphi_3)(x) = \frac{x-1}{x}$ și $\varphi_6(x) = (\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3)(x) = \frac{x}{x-1}$. Un exercițiu din manualul școlar de clasa a XII-a arată că $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$ formează un grup. Dacă a este un număr real din A pentru care $\varphi_1(a)$,

$\varphi_2(a)$, $\varphi_3(a)$, $\varphi_4(a)$, $\varphi_5(a)$, $\varphi_6(a)$ sînt diferite două câte două atunci ecuația $f(x) = f(a)$ are aceste 6 rădăcini și fiind de gradul 6, nu mai are alte rădăcini. Valorile lui $a \in A$ pentru care cele șase numere de mai sus nu sînt toate distincte sînt $a = \frac{1}{2}$, $a = -1$, $a = 2$, iar pentru aceste valori $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(a)$, $\varphi_3(a)$, $\varphi_4(a)$, $\varphi_5(a)$,

$\varphi_6(a)$ este formată din numerele $\frac{1}{2}$, -1 , 2 fiecare luate de două ori. Se verifică ușor că $f(\frac{1}{2}) = f(-1) = f(2) = \frac{27}{4}$ și că ecuația $f(x) = \frac{27}{4}$ are rădăcinile duble $\frac{1}{2}$, -1 , 2 deci pentru fiecare $a \in A$ soluțiile ecuației $f(x) = f(a)$ sînt tocmai $\varphi_k(a)$, $k = \overline{1,6}$.

Dacă $\varphi \in G$ și $a \in A$ atunci $f(\varphi(a)) = f(a)$ deci $\varphi(a)$ este una din valorile $\varphi_k(a)$. Răspunsul tentant (dar greșit) este $G = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$.

În realitate lucrurile sînt mai complicate. În principiu dacă $\varphi \in G$ și $a \in A$ atunci există $k \in \overline{1,6}$ cu $\varphi(a) = \varphi_k(a)$ numai că acest k poate să fie altul pentru diferiți a . Dacă $a, b \in A$ atunci mulțimile $E_a = \{\varphi_k(a) \mid k \in \overline{1,6}\}$, $\{\varphi_k(b) \mid k \in \overline{1,6}\} = E_b$ sînt disjuncte sau coincid. Orice $\varphi \in G$ are proprietatea că $\varphi(E_a) = E_a$ și evident orice bijecție cu proprietatea $\varphi(E_a) = E_a$, pentru orice a , aparține lui G deci G este complet descris și problema este complet rezolvată.

Un mod diferit de abordare ar fi următorul.

Rezolvăm întâi, direct, ecuația $f(x) = f(a)$. Pentru aceasta observăm că ecuația $f(x) = f(a)$ devine, dacă punem $x^2 - x = y$ și $a^2 - a = b$,

$$\frac{(y+1)^3}{y^2} = \frac{(b+1)^3}{b^2},$$

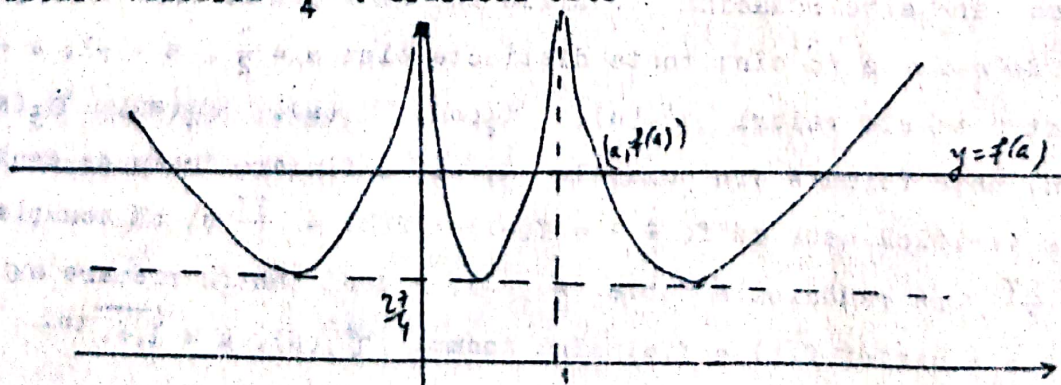
o ecuație de gradul al treilea în y care are rădăcina $y_1 = b$ și alte două care se calculează

$$y_{2,3} = \frac{3b+1 \pm \sqrt{4b^3+9b^2+6b+1}}{2b^2} = \frac{3a^2-3a+1 \pm (2a^3-3a^2+3a-1)}{2(a^2-a)^2}$$

de unde soluțiile sînt

$$x_1 = a, x_2 = 1-a, x_3 = \frac{1}{a}, x_4 = \frac{a-1}{a}, x_5 = \frac{1}{1-a}, x_6 = \frac{a-1}{a}.$$

Reprezentăm grafic funcția f : ea are asimptotele verticale $x=0$ și $x=1$ și trei puncte de minim local în $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ avînd în fiecare valoarea $\frac{27}{4}$. Graficul este



Pentru ca φ să aparțină lui G este necesar și suficient ca, notând E_a abscisele punctelor de intersecție ale lui G_f cu $y = f(a)$, $\varphi|_{E_a}$ să fie bijecție a lui E_a pe E_a . Nu este greu de văzut, pe aceeași cale că dacă în enunț se adăuga cerința ca φ să fie o bijecție continuă atunci grupul ar fi fost format numai din $\{\varphi_k \mid k = \overline{1,6}\}$.

4°. Fie $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Să se determine o funcție continuă $g_\varepsilon : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$g_\varepsilon(x) = x^3 + \varepsilon + 3 \int_0^x t^2 g_\varepsilon^2(t) dt, \quad (\forall) x \in [0,1].$$

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$f(x) \leq x^3 + 3 \int_0^x t^2 f^2(t) dt, \quad (\forall) x \in [0,1].$$

Să se arate că $f(x) \leq \operatorname{tg} x^3$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

Gh. Eckstein, lector, Univ. Timișoara.

Soluție: Enunțul este (supărător de) lung deoarece prima lui parte este de fapt o indicație de rezolvare. Dacă g_ε este continuă și satisface egalitatea din enunț atunci întrucât membrul drept este derivabil, g_ε va fi derivabil pe $[0,1]$ și $g_\varepsilon(0) = \varepsilon$. Derivând egalitatea, g_ε verifică

$$g'_\varepsilon(x) = 3x^2 + 3x^2 g_\varepsilon^2(x), \text{ adică}$$

$$\frac{g'_\varepsilon(x)}{1+g_\varepsilon^2(x)} = 3x^2, \text{ sau}$$

$$[\arctg g_\varepsilon(x)]' = (x^3)',$$

de unde

$$g_\varepsilon(x) = \operatorname{tg}(x^3 + c).$$

Punând condiția $g_\varepsilon(0) = \varepsilon$ se deduce $c = \arctg \varepsilon$ și se verifică ușor că acest g_ε satisface efectiv relația din enunț.

După cum se vede $g(x) = g_0(x) = \operatorname{tg} x^3$ satisface inegalitatea din enunț cu egalitate, iar ceea ce se cere în enunț este că $f(x) \leq g(x)$.

După cum sugerează enunțul vom folosi pentru aceasta funcțiile g_ε .

Va fi suficient să demonstrăm că $f(x) \leq g_\epsilon(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$, oricare ar fi $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ căci trecînd la limită cu $\epsilon \rightarrow 0$ pentru x fixat vom obține concluzia dorită. Cum $f(0) \leq 0 < \epsilon = g_\epsilon(0)$ și f, g_ϵ sînt continue, pe o vecinătate a lui zero vom avea $f(x) < g_\epsilon(x)$. Considerăm mulțimea

$$A = \{x \in [0, 1] \mid f(t) \leq g_\epsilon(t), (\forall) t \in [0, x]\}.$$

Din cele de mai sus A este o mulțime nevidă care are proprietatea că dacă $x \in A$ atunci $[0, x] \subset A$ deci A este un interval. Dacă $[0, c) \subset A$ atunci $f(c) = \lim_{t \rightarrow c} f(t) \leq \lim_{t \rightarrow c} g_\epsilon(t) = g_\epsilon(c)$ și $c \in A$ deci A este un interval de forma $[0, b] \subset [0, 1]$. Să demonstrăm că $b = 1$. Intr-adevăr

$$f(b) \leq x^3 + 3 \int_0^b t^2 f^2(t) dt < x^3 + \epsilon + 3 \int_0^b t^2 g_\epsilon(t) dt = g_\epsilon(b)$$

și dacă $b < 1$ atunci din $f(b) < g_\epsilon(b)$ am deduce că inegalitatea $f(t) \leq g_\epsilon(t)$ ar avea loc pe un interval care include strict pe $[0, b]$ ceea ce contrazice definiția lui b . Am demonstrat deci

$$f(x) \leq g_\epsilon(x), (\forall) x \in [0, 1], (\forall) \epsilon \in (0, \frac{1}{2})$$

ceea ce, am văzut, rezolvă problema.

Testul nr.2, clasa a XII-a, 6 iunie 1987.

1^o. Fie $K \subset L$ două corpuri finite avînd proprietatea că fiecare polinom din $K[X]$ care este ireductibil, este ireductibil și peste L . Să se arate că are loc $L = K$.

M. Tena, profesor, București.

Soluție: Fie $a \in L$ arbitrar ales. Deoarece L este finit printre puterile naturale ale lui a va exista una pentru care $a^n = 1$. Considerăm polinomul $P = X^n - 1 \in K[X]$. Acest polinom are rădăcina a în L . Fie $P = P_1 P_2 \dots P_s$ descompunerea lui P în factori ireductibili peste K în $K[X]$. Unul dintre factori, să zicem P_1 , va avea rădăcina a și va fi ireductibil peste K deci și peste L . Deoarece $P_1(a) = 0$, P_1 trebuie să fie de gradul 1 (altfel n -ar fi ireductibil peste L) adică

$P_1(X) = \alpha X + \beta$, $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$ și de aici $\alpha a + \beta = 0$ adică $a = -\beta\alpha^{-1} \in K$ deci $L \subset K$.

2°. Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Să se arate că

$$\int_0^1 f^2(x^2) dx \geq \frac{3}{4} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$$

și să se determine funcțiile pentru care are loc egalitatea.

L. Panaitopol, lector dr., Univ. București.

Soluție: Evident

$$(1) \quad (f(x^2) - tx)^2 \geq 0, \quad (\forall) x \in [0,1], \quad (\forall) t \in \mathbb{R}.$$

Dezvoltînd binomul și integrînd pe $[0,1]$ (după x) se obține

$$(2) \quad \int_0^1 f^2(x^2) dx - t \int_0^1 2xf(x^2) dx + \frac{t^2}{3} \geq 0, \quad (\forall) t \in \mathbb{R}.$$

Intrucît trinomialul în t păstrează semn constant, $\Delta \leq 0$ adică

$$\left(\int_0^1 2xf(x^2) dx \right)^2 \leq \frac{4}{3} \int_0^1 f^2(x^2) dx$$

și ținînd cont că $\int_0^1 f(x^2) 2x dx = \int_0^1 f(x) dx$ se obține inegalitatea din enunț. Egalitatea înseamnă de fapt $\Delta = 0$ deci există $t \in \mathbb{R}$ pentru care în (2) avem egalitate. Intrucît f este continuă

$$\int_0^1 (f(x^2) - tx)^2 dx = 0$$

implică $f(x^2) = tx$ oricare ar fi $x \in [0,1]$ adică

$$f(x) = t\sqrt{x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3°. Fie G un grup. Dacă H este un subgrup al lui G definim

$$C_G(H) = \{g \in G \mid hg = gh, (\forall) h \in H\}$$

$$N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}hg \in H, (\forall) h \in H\}.$$

Să se arate că $C_G(N_G(H)) \subseteq N_G(C_G(H))$ și să se caracterizeze grupurile în care are loc $C_G(N_G(H)) = N_G(C_G(H))$ pentru toate subgrupurile H ale lui G .

* * *

Soluție: Se verifică imediat că $C_G(H)$ și $N_G(H)$ sînt subgrupuri în

G . În plus dacă L, H sînt două subgrupuri în G cu $L \subset H$ atunci se veri-

fică imediat că

$$(1) \quad C_G(H) \subseteq N_G(H),$$

$$(2) \quad C_G(H) \subseteq C_G(L).$$

Aplicînd incluziunea (2) subgrupurilor din (1) deducem

$$C_G(C_G(H)) \supseteq C_G(N_G(H))$$

și ținînd cont de (1),

$$N_G(C_G(H)) \supseteq C_G(C_G(H)) \supseteq C_G(N_G(H))$$

adică am obținut incluziunea din enunț.

Pentru partea a doua a problemei, dacă are loc egalitatea pentru fiecare subgrup H ea are loc și pentru $H = \{e\}$. În acest caz $C_G(H) = \{g \mid ge = eg\} = G$ și $N_G(H) = \{g \mid g^{-1}g = e\} = G$, așadar avem $N_G(G) = C_G(G)$. Dar, evident, $N_G(G) = G$, deci

$$G = C_G(G) = \{g \in G \mid gh = hg, (\forall) h \in G\}$$

înseamnă tocmai G să fie comutativ. Dacă, reciproc, G este comutativ $N_G(H) = C_G(H) = G$ pentru fiecare subgrup H și evident și $G(N_G(H)) = G = N_G(C_G(H))$, adică egalitatea din enunț caracterizează grupurile comutative.

Notă. Soluțiile la testele de mai sus au fost redactate de lector univ., Gh. Eckstein, Universitatea din Timișoara. Soluții la problemele 2 și 4 (testul nr.1) și problema 2 (testul nr.2) au fost primite și de la T. Bînzaru, student, Universitatea din Timișoara.

55. TESTE PENTRU PREGĂTIREA EXAMENELOR DE BACALAUREAT ȘI A EXAMENELOR DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂMÎNTUL SUPERIOR

Am parcurs în paragrafele anterioare și în caietele de pînă acum marea majoritate a temelor din manuale. Ne-am apropiat acum de sfîrșitul seriei de caiete, în prima lor versiune, și este timpul să ne ocupăm acum de bacalaureat și examenele de admitere în învățămîntul superior.

5A. O VERSIUNE DE TEST PENTRU PREGĂTIREA BACALUREATULUI

I. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care există $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, nu toți nuli, astfel încît

$$x \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a+1 & 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Să se rezolve apoi ecuația pentru valorile lui a determinate anterior.

II. Fie $(G, +)$ un grup comutativ și $a \in G$. Pe G se definește legea de compoziție $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x \dot{+} y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + a$.

Arătați că $(G, \dot{+})$ este grup.

III. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ și $g(x) = \ln(1+x^2)$.

a) Să se determine funcția $h(x) = \max[f(x), g(x)]$ pentru $x \in [0, 1]$.

b) Să se calculeze aria mulțimii plane cuprinse între graficele funcțiilor f , g și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

IV. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încît funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

să admită un punct de extrem la distanța 1 de axa Oy . Pentru $a = 1$, să

se studieze variația și să se traseze graficul lui f .

Propus de M. Neacșu, profesor, Caransebeș.

5B. SELECTII DIN TESTELE DATE LA EXAMENELE DE ADMITERE ÎN ÎNVĂȚĂ-
MÎNTUL SUPERIOR A LOTULUI NATIONAL DE MATEMATICĂ ȘI DE FIZICĂ

Se știe că în anii 1986 și 1987 loturile naționale de matematică și de fizică au efectuat la Universitatea din Timișoara stagiul de pregătire pentru Olimpiadele Internaționale.

Vă prezentăm mai jos testele examenelor de admitere în învățămîntul superior din anul 1987.

5B1. Profilul tehnic și fizică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Algebră și Analiză.

1) Fie $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{1 + (4-a^2)x - x^2}{a(x^2 + 1)}}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Să se determine a astfel încît I să fie un interval mărginit de lungime minimă.

2) Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se introduc operațiile algebrice $\star$, $\circ$ definite prin $x \star y = x+y+1$, $x \circ y = x+y-1$. Să se arate că se obțin astfel două structuri de grup abelian pe $\mathbb{Z}$, care sînt izomorfe.

3) Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2+n+1})$.

4) Să se arate că polinomul $P = X^{11} + X^{10} + X^5 + X^4 + 2$ este divizibil cu X^2+X+1 . Aflați restul împărțirii lui P la $(X-1)(X+1)$, (fără a face împărțirea) știind că restul împărțirii lui P la $X-1$ respectiv la $X+1$ este 6, respectiv 2.

5) Fie funcția $f: \mathbb{R} - \{0, \pm \frac{1}{e}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln |x|}{1+\ln |x|}$

Să se traseze graficul funcției f și să se calculeze:

$$\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx.$$

5E2. Profilul tehnic (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Geometrie și Trigonometrie.

1) Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$ și $\{Q\} = AP \cap MN$. Să se arate că are loc relația:

$$\frac{MQ}{NQ} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AM}{AN}.$$

2) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{5}$.

3) Fie AO , înălțimea unui tetraedru $[ABCD]$ în care muchiile $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ sînt perpendiculare două cîte două. Să se arate că

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

4) Intr-un trapez $ABCD$, vîrfurile A și B sînt fixe, baza CD este de lungime constantă, iar C descrie un cerc cu centrul în A . Să se afle locurile geometrice ale mijloacelor diagonalelor trapezului.

5) Să se arate că dacă

$$a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x = 0, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

atunci $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Generalizare.

5E3. Profilul matematică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Algebră.

1) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

știind că $a \neq 0$.

2) Să se rezolve ecuația:

$$\log_2 x^{\sqrt{5}} + 1 + \log_x 4^{\sqrt{5}} + 1 = \log_2 16x^3 - \log_x 16$$

3) Știind că $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ să se calculeze produsul

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^{1987})$$

4) a) Să se arate că mulțimea

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a - b + i(a + b); a, b \in \mathbb{Z}\}$$

este grup în raport cu adunarea numerelor complexe.

b) Este mulțimea A parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea ?

Justificați răspunsul !

5) Fie $p > 2$ un număr prim. Să se determine clasa de resturi modulo p a numărului C_{p+k}^k , unde $1 \leq k \leq p$.

5B4. Profilul matematică (lotul olimpie). Sesiunea iunie 1987.
Proba de Analiză Matematică.

1) Să se arate că șirul $\{x_n\}_{n \geq 1}$ definit prin

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

este convergent și că limita sa aparține intervalului $[-2, -1]$.

2) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, există $x \in (0, 1)$ astfel încât

$$n x^{n-1} - n x^n > \frac{1}{e}$$

3) Să se reprezinte grafic funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \left| \operatorname{arctg} \frac{2+x}{1+2x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right|$$

4) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} \right) \right]^x$$

unde $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

5) Să se calculeze:
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x} \cos x} dx.$$

5B5. Profilul matematică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987.
Proba de Geometrie și Trigonometrie.

1) Se dau triunghiul ABC, $D \in BC$ piciorul înălțimii din A și $M \in BC$ oarecare. Fie E și F proiecțiile lui D pe AB respectiv AC, iar P și Q proiecțiile lui M pe AB respectiv AC.

Să se arate că între lungimile segmentelor [PQ] și [EF] are loc relația $EF \leq PQ$.

2) Se dau în plan un cerc $\mathcal{C}(O, R)$ și un punct $A \neq O$, $A \notin \mathcal{C}(O, R)$. Fie $M \in \mathcal{C}(O, R)$ și P mijlocul segmentului [AM]. Să se afle locul geometric al lui P când M descrie cercul dat.

3) Se consideră piramida [SABC] unde ABC este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza [BC] de lungime a și cu unghiul ascuțit $\hat{B}$ de măsură α . Muchiile laterale [SA], [SB] și [SC] formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură β .

Să se găsească volumul piramidei și măsurile unghiurilor $\widehat{ASB}$, $\widehat{ASC}$, $\widehat{BSC}$.

4) Se consideră o elipsă $\mathcal{E}$ de focare F, F' și $M \in \mathcal{E}$.

(I) Să se arate că tangenta și normala la elipsă în punctul M sînt bisectoarele unghiurilor determinate de dreptele F'M și FM.

(II) Să se afle locul geometric al punctului N, simetricul lui F față de tangenta în M, când M descrie elipsa dată.

5) Să se rezolve ecuația:

$$\cos(\lambda \sin x) = \sin(\lambda \cos x).$$

5B6. Soluții și model de corectare a testului de Algebră și Analiză Matematică, profilul tehnic și profilul fizică.

1) Start (1p). Punem condiția

$$\frac{1 + (4-a^2)x - x^2}{a(x^2 + 1)} \geq 0, (\forall) x \in I \quad (1p)$$

În cazul $a > 0$ obținem condiția $1 + (4-a^2)x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [x_1, x_2]$ deci $I = [x_1, x_2]$ ($x_1 < x_2$) (2p).

Lungimea intervalului este minimă dacă $x_2 - x_1 = \sqrt{a^4 - 8a^2 + 20}$ este minimă (2p). Obținem $a = 2$ (1p).

În cazul $a < 0$ obținem $x^2 - (4-a^2)x - 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in I$ (1p) de unde rezultă că $x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$ și obținem o mulțime nemărginită (2p). În acest caz nu avem soluție.

2) Start (1p). Arătăm că $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian (3p) și $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este grup abelian (3p). Găsim apoi că aplicația $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x+2$ este izomorfismul între cele două grupuri (3p).

3) Start (1p). Folosim relația

$$\sin^2 \gamma \sqrt{n^2 + n + 1} = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2} \sqrt{n^2 + n + 1} \quad (2p)$$

și rezultă că trebuie să calculăm: $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\gamma \sqrt{n^2 + n + 1} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\gamma (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (3p). \text{ Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) = \frac{1}{2} \quad (1p) \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \gamma \sqrt{n^2 + n + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma = 1 \quad (3p).$$

4) Start (1p). Observăm că $X^2 + X + 1 = (X - \omega)(X - \omega^2)$ unde $\omega \notin \mathbb{R}$, $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (3p).

$$\text{Calculăm } P(\omega) = \omega^{11} + \omega^{10} + \omega^5 + \omega^4 + 2 = \omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega + 2 = 0 \quad (1p).$$

Cum $P \in \mathbb{R}[X]$ și $P(\omega) = 0 \Rightarrow P(\omega^2) = P(\bar{\omega}) = 0$ deci P se divide cu $X - \omega$ și $X - \omega^2$ (1p), adică cu Q .

Scriem teorema împărțirii cu rest

$$P(X) = (X-1)(X+1)Q(X) + mX + n \quad (1p)$$

Dăm lui X valorile $1, -1$ și obținem

$$P(1) = m + n = 6$$

$$P(-1) = -m + n = 2 \quad (2p)$$

de unde $n = 4, m = 2 \quad (1p).$

5) Start (1p). Observăm că $f(-x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm \frac{1}{e}\} \quad (1p).$

$$f(0+0) = 1 \quad (0,5p),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad (0,5p)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = +\infty \quad (0,5p),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} f(x) = -\infty \quad (0,5p)$$

$$x > \frac{1}{e}$$

$$x < -\frac{1}{e}$$

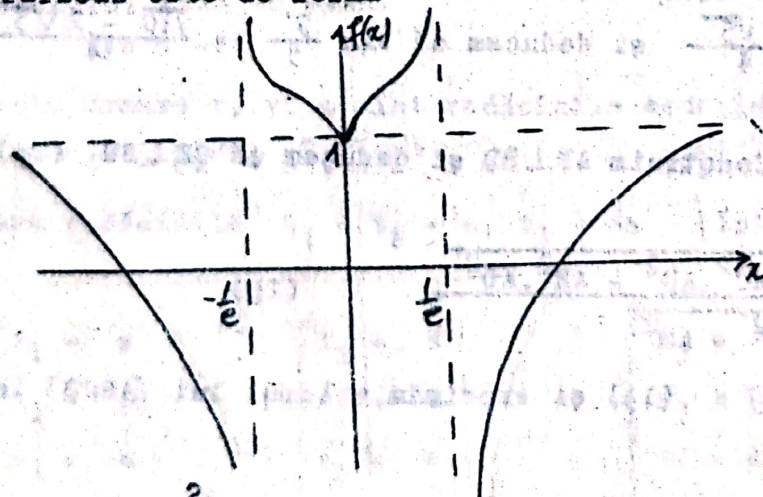
$$\text{Calculăm } f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2} \quad (1p).$$

Tabelul de variație este:

x	0	$\frac{1}{e}$	∞
f'	+	+	+
f	1	∞	$-\infty$

(1p)

Graficul este de forma



$$\text{Calculăm } \int_0^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = 1 - \ln \frac{3}{2} \quad (3p) \text{ prin schimbarea de variabilă } \varphi(x) = \ln x. \quad (1p).$$

5B7. Soluții și model de corectare la proba de Geometrie și Trigonometrie.

1) Start (1p). Observăm că rapoarte din relația de demonstrat pot fi exprimate cu ajutorul unor arii:

$$\frac{MQ}{NQ} = \frac{\sigma[AMQ]}{\sigma[ANQ]}, \quad \frac{BP}{PC} = \frac{\sigma[QBP]}{\sigma[QPC]}$$

$$\frac{AC}{AN} = \frac{\sigma[AQC]}{\sigma[ANQ]}, \quad \frac{AM}{AB} = \frac{\sigma[AMQ]}{\sigma[AQB]} \quad (4p).$$

Prin urmare:

$$\frac{\sigma[QBP]}{\sigma[AQB]} = \frac{QP}{AQ} = \frac{\sigma[QPC]}{\sigma[AQC]} \quad (4p)$$

Înlocuind rezultă relația cerută (1p).

2) Start (1p). Putem folosi formulele

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \text{și}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad (1p)$$

Ținem seama de $\cos \pi = -1$ sau $\sin \pi = 0$ (3p), notînd $\cos \frac{\pi}{5} = x$ obținem ecuația

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = 0 \quad (1p)$$

Observăm că $x_1 = -1$ care nu corespunde (1p). Rezolvăm ecuația:

$$16x^4 - 16x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{și obținem } x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad (2p).$$

$$\text{Rezultă } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{și deducem că } \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}{4}. \quad (1p)$$

3) Start (1p). Construim $AE \perp BD$ și deducem că $CE \perp BD$ (2p). Calculăm

$$CE = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 + AC^2 \cdot AD^2 + AB^2 \cdot AD^2}}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} \quad (2p)$$

Calculăm $\sigma[BCD]$ (1p) și exprimăm volumul lui $[ABCD]$ în două moduri și deducem

$$AO = \frac{AC \cdot AB \cdot AD}{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 + AC^2 \cdot AD^2 + AB^2 \cdot AD^2}} \quad (3p)$$

de unde se verifică relația cerută (1p).

4) Start (1p). Observați că mijlocul lui (AC) descrie cercul cu centrul în A și de rază $\frac{1}{2} AC$ (4p). Fie M, N mijloacele diagonalelor. Rezultă că $MN \parallel AB$ și MN are lungimea constantă (3p). Rezultă că N descrie un cerc (2p).

5). Start (1p). Alegem valori distincte pentru x și scriem sistemul liniar ce se obține (5p). Rezolvăm sistemul și obținem $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (3p). Generalizare (1p).

5B8. Soluții și model de corectare la proba de Algebră, profil matematică.

1) Start (1p). Asupra necunoscutelor x, y, z punem condițiile: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ (1p). Scriem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 3a^2 \\ \frac{xy+xz+yz}{xyz} = \frac{1}{a} \end{cases} \quad (1p)$$

Deducem:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = -a^2 \\ xyz = -a^3 \end{cases} \quad (2p)$$

Prin urmare x, y, z sînt rădăcinile ecuației de gradul trei:

$$t^3 - at^2 - a^2t + a^3 = 0 \quad (2p)$$

care are rădăcinile $t_1 = t_2 = a, t_3 = -a$ (1p). Soluțiile sistemului sînt:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = a \\ z_1 = -a \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a \\ y_2 = -a \\ z_2 = a \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -a \\ y_3 = a \\ z_3 = a \end{cases} \quad (2p)$$

2) Start (1p). Punem condițiile $x > 0, x \neq 1$ (1p). Aplicăm formula de schimbare a bazei și deducem

$$(\sqrt{5} + 1)\log_2 x + (\sqrt{5} + 1) \frac{\log_2 4}{\log_2 x} = 4 + 3\log_2 x - \frac{4}{\log_2 x} \quad (2p)$$

Facem substituția $\log_2 x = y$ și deducem:

$$(\sqrt{5} + 1)y + \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{y} = 4 + 3y - \frac{4}{y} \quad (1p)$$

Obținem ecuația de gradul al doilea în y :

$$(\sqrt{5} - 2)y^2 - 4y + 2\sqrt{5} + 6 = 0 \quad (1p)$$

care are rădăcinile:

$$y_1 = 7 + 3\sqrt{5}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{5} \quad (2p)$$

de unde

$$x_{1,2} = 2^{y_{1,2}} \quad (2p).$$

3) Start (1p). Observăm că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$ (1p).

Deducem: $\varepsilon^{3k} = 1$, $\varepsilon^{3k+1} = \varepsilon$, $\varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$ (2p) deci $1 + \varepsilon^{3k} = 2$, $1 + \varepsilon^{3k+1} = 1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$, $1 + \varepsilon^{3k+2} = 1 + \varepsilon^2 = -\varepsilon$ (1p).

$(1 + \varepsilon^{3k+1})(1 + \varepsilon^{3k+2})(1 + \varepsilon^{3k}) = (-\varepsilon^2)(-\varepsilon) \cdot 2 = 2$ (2p). Cum $1987 = 3 \cdot 662 + 1$ rezultă:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^2) \dots (1 + \varepsilon^{1986})(1 + \varepsilon^{1987}) &= 2^{662}(-\varepsilon^2) = \\ &= -2^{662} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \quad (3p) \end{aligned}$$

4) Start (1p). Arătăm că dacă $z_1, z_2 \in A$ rezultă $z_1 + z_2 \in A$ (2p).

Verificăm asociativitatea (1p), existența elementului neutru $z_0 = 0$ (1p) și că pentru orice $z \in A$, există $z' = (-a+b) + i(-a-b) \in A$ încât $z+z' = z'+z = 0$ (2p).

A este parte stabilă față de înmulțire dacă pentru orice $z, z' \in A$ avem $zz' \in A$ (1p). Luăm $z = a-b + i(a+b)$, $z' = c-d + i(c+d)$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ și obținem $zz' = -2(ad+bc) + 2i(ac-bd) \in A$ (2p) deci A este parte stabilă față de înmulțire.

5) Start (1p). Avem:

$$C_{p+k}^k = \frac{(p+k)(p+k-1) \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}, \quad 1 \leq k \leq p \quad (1p)$$

$$C_{2p}^p = \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)p} = \frac{[p+(p-1)][p+(p-2)] \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots (p-1)} \quad (1p)$$

Ținem seama de

$$\widehat{p+x} = \widehat{x}, \quad x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$$

$$\widehat{x \cdot y} = \widehat{x} \cdot \widehat{y}$$

$$(\widehat{x \cdot y})^{-1} = \widehat{x}^{-1} \cdot \widehat{y}^{-1} \quad \text{dacă } \widehat{x}, \widehat{y} \neq 0 \quad (2p)$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{p+k}^k &= (\widehat{p+k})(\widehat{p+k-1}) \dots (\widehat{p+2})(\widehat{p+1})(\widehat{1 \cdot 2 \dots k})^{-1} = \\ &= \widehat{k}(\widehat{k-1}) \dots \widehat{2} \cdot \widehat{1} \cdot \widehat{1}^{-1} \cdot \widehat{2}^{-1} \dots \widehat{k}^{-1} = 1 \end{aligned}$$

pentru $1 \leq k < p$ (3p).

$$\widehat{C}_{2p}^p = \widehat{2}(\widehat{p-1})(\widehat{p-2}) \dots \widehat{2} \cdot \widehat{1} \cdot \widehat{1}^{-1} \cdot \widehat{2}^{-1} \dots (\widehat{p-1})^{-1} = \widehat{2}.$$

5B9. Soluții și model de corectare pentru proba de Analiză Matematică, profil matematică.

1) Start (1p). Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} > 0, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^+ \quad (3p)$$

Demonstrați apoi (prin inducție matematică) faptul că

$$x_n < -1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (3p)$$

Din mărginirea la dreapta și monotonie rezultă:

$$-2 < 1 - 2\sqrt{2} = x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < -1 \quad (1p)$$

de unde rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [-2, -1]$. (2p)

2) Start (1p). Studiați variația funcției $f(x) = nx^{n-1} - nx^n$,

$x \in [0, 1]$. (3p). Comparăm valoarea maximă a funcției f , $f(x_M) =$

$= (1 - \frac{1}{n})^{n-1}$ cu $\frac{1}{e}$ (2p) și observăm că

$$(1 - \frac{1}{n})^{n-1} = (\frac{n-1}{n})^{n-1} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow (\frac{n}{n-1})^{n-1} < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < e \quad (4p).$$

3) Start (1p). Studiați semnul funcției $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{2+x}{1+2x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ (2p), după care explicitați funcția f :

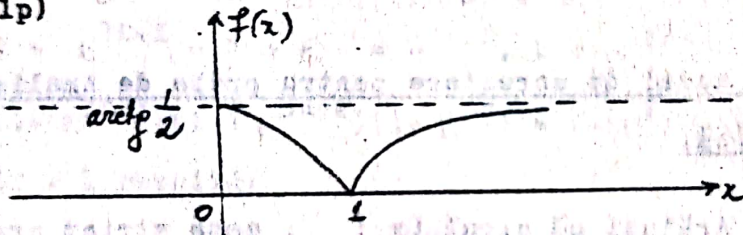
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} \frac{2+x}{1+2x}, & 0 < x \leq 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2+x}{1+2x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} \quad (2p)$$

$$f'_g(1) = -\frac{3}{10}, \quad f'_d(1) = \frac{3}{10} \quad (1p). \text{ Tabloul de variație al lui } f \text{ este:}$$

x	0	1	∞
f'	-	-	+
f	$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2$	0	$\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

(2p)

Țineți seama că $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ (1p). Graficul lui f este: (1p)



4) Start (1p). Limita este de forma (1^∞) (1p). Avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} \right) \right]^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} - 2}{2}} \quad (2p).$$

$$\text{Calculăm } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} - 2}{2} \cdot x = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y + b^y - 2}{2y} = \ln \sqrt{ab} \quad (4p).$$

$$\text{Obținem } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} \right) \right]^x = \sqrt{ab} \quad (2p).$$

$$5). \text{ Start (1p). } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin^2 x)' \, dx}{\sqrt{1 - 2\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}}$$

(3p). Facem schimbarea de variabilă $\varphi(x) = \sin^2 x$ și obținem:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dt}{\sqrt{1-2t} (1-t)} \quad (2p)$$

$$\text{Prin urmare } I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3p)$$

deci

$\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x} \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (1p).$$

CUPRINS

PREFATA	1
1. <u>COMPLEMENTE LA MANUALELE DE ANALIZA MATEMATICA SI DE ALGEBRA</u>	3
1.A. <u>COMPLEMENTE LA MANUALUL DE ANALIZA MATEMATICA, CLASA A XII-a</u>	3
1.A.1. <u>Aplicații ale integralei definite</u>	12
1.A.2. <u>Probleme recapitulative</u>	13
1.B. <u>COMPLEMENTE LA MANUALUL DE ALGEBRA PENTRU CLASA A XII-a</u>	13
1.B.1. <u>Inele de polinoame</u>	16
1.B.2. <u>Spații liniare</u>	18
2. <u>CITEVA PROBLEME DE TIP CONCURS</u>	37
3. <u>SOLUTII LA PROBLEMELE DATE LA TESTELE PRELIMINARE- EDITIA 1987</u>	37
TESTUL DAT LA ETAPA A I-a LOCALA, 14 DECEMBRIE 1986	44
Probleme de rezervă pentru testul I	47
TESTUL DAT LA ETAPA A II-a LOCALA, 22 FEBRUARIE 1987	52
Probleme de rezervă pentru testul II	55
TESTUL DAT LA ETAPA A III-a LOCALA, 29 MARTIE 1987	60
Probleme de rezervă pentru testul III	62
TESTUL DAT LA ETAPA JUDETEANA, 24 MAI 1987	65
4. <u>SOLUTII LA PROBLEMELE DATE LA EDITIA A III-a A CONCURSULUI</u>	65
" TRAIAN LALESCU", INEU, 1987	65
Testul nr.1, clasa a XII, 5 iunie 1987	70
Testul Nr.2, clasa a XII-a, 6 iunie 1987	73
5. <u>TESTE PENTRU PREGATIREA EXAMENELOR DE BACALAUREAT SI A EXAMENELOR DE ADMITERE IN INVATAMINTUL SUPERIOR</u>	73
5A. <u>O VERSIONE DE TEST PENTRU PREGATIREA BACALAUREATULUI</u>	73
5B. <u>SELECTII DIN TESTELE DATE LA EXAMENELE DE ADMITERE IN INVATAMINTUL SUPERIOR A LOTULUI NATIONAL DE MATEMATICA SI DE FIZICA</u>	74
5.B.1. <u>Profilul tehnic și fizica (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Algebră și Analiză</u>	74
5.B.2. <u>Profilul tehnic (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Geometrie și Trigonometrie</u>	75
5.B.3. <u>Profilul matematică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Algebră</u>	75
5.B.4. <u>Profilul matematică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Analiză Matematică</u>	76
5.B.5. <u>Profilul matematică (lotul olimpic). Sesiunea iunie 1987. Proba de Geometrie și Trigonometrie</u>	77
5.B.6. <u>Soluții și model de corectare a testului de Algebră și Analiză Matematică, profilul tehnic și profilul fizică</u>	78
5.B.7. <u>Soluții și model de corectare la proba de Geometrie și Trigonometrie</u>	80

5.B.8. Soluții și model de corectare la proba de Algebră, profil matematică	81
5.B.9. Soluții și model de corectare pentru proba de Analiză Matematică, profil matematică	83

În seria de caiete de informare matematică TESTE ȘI PROBLEME COMENTATE pentru CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU" (liceu) au apărut:

1. Caietul nr.1, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea I-a (conține recapitularea noțiunilor din gimnaziu și noțiuni introductive din manualele de clasa a IX-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a IX-a).
2. Caietul nr.2, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a VI-a (conține ultima parte a manualelor de clasa a IX-a și noțiuni introductive din manualele de clasa a X-a; acoperă programa testului nr. 1 (octombrie), clasa a X-a).
3. Caietul nr.3, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a V-a (conține ultima parte a manualelor de clasa a X-a și noțiuni introductive din manualele de clasa a XI-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a XI-a).
4. Caietul nr.4, ALGEBRĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XI-a, partea a VI-a (conține ultima parte a manualelor de clasa a XI-a și noțiuni ajutătoare pentru clasa a XII-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a XII-a).
5. Caietul nr.5, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasele IX-X (conține enunțurile și soluțiile testelor prin corespondență de la ediția 1987 pentru clasele IX-X).
6. Caietul nr.6, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasele XI-XII (conține enunțurile și soluțiile testelor prin corespondență de la ediția 1987 pentru clasele XI-XII).
7. Caietul nr.7, TESTELE CONCURSULUI PRIN CORESPONDENȚĂ, EDIȚIA 1988, pentru clasele IX-XII.
8. Caietul nr.8, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a II-a (acoperă programa testului nr.2 (decembrie), clasa a IX-a).
9. Caietul nr.9, ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea I-a (acoperă programa testului nr.2 (decembrie), clasa a X-a).
10. Caietul nr.10, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, părțile I-II, acoperă programa testului nr.2 (decembrie), clasa a XI-a).
11. Caietul nr.11, ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, părțile I-II (acoperă programa testului nr.2 (decembrie).

12. Caietul nr.12, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie), clasa a IX-a).
13. Caietul nr.13, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a II-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie), clasa a X-a).
14. Caietul nr.14, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3, (februarie), clasa a XI-a).
15. Caietul nr.15, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie), clasa a XII-a).
16. Caietul nr.16, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a IX-a).
17. Caietul nr.17, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a X-a).
18. Caietul nr.18, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a XI-a).
19. Caietul nr.19, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a XII-a).
20. Caietul nr.20, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a V-a (acoperă programa testului nr.5 (mai) și nr.6 (iunie), clasa a IX-a).
21. Caietul nr.21, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.5 (mai) și nr.6 (iunie), clasa a X-a).
22. Caietul nr.22, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea a V-a (acoperă programa testului nr.5 (mai) și nr.6 (iunie), clasa a XI-a).
23. Caietul nr.23, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, partea a V-a (acoperă programa testului nr.5 (mai) și nr.6 (iunie), clasa a XII-a).